Repaso Final A

Thursday, May 06, 2021 2:23 PM

Pregunta 8 **15 pts**

Considere el modelo de Stackelberg donde dos empresas $\{A, B\}$ compiten en un mismo mercado. La demanda inversa del mercado está dada por:

$$P(Q) = 100 - Q$$

$\rightarrow P(Q) = 100 - Q$

donde Q es la cantidad total del mercado.

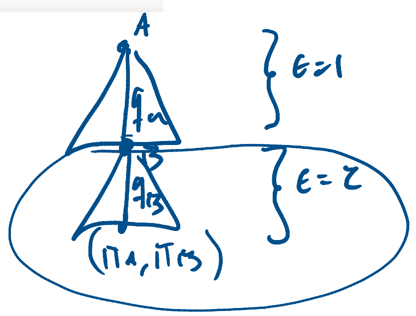
La empresa A es la empresa líder y escoge su cantidad primero, y tiene un costo de producción $CT_A(q_A) = 50q_A$. La empresa B es la empresa seguidora que observa la cantidad que produce A y después escoge su cantidad, y tiene un costo de producción $CT_B(q_B) = 20q_B$.

Considerando la estrategia que juega la empresa B en el equilibrio perfecto en subjuegos. Si la empresa A aumenta su producción en una unidad, la empresa B disminuye su cantidad en $-1/2$ unidades.

Considerando la estrategia que juega la empresa B en el equilibrio perfecto en subjuegos. Si la empresa A produce su cantidad de monopolio, la empresa B produciría 22.5 unidades.

En el equilibrio perfecto en subjuegos la empresa B tiene pagos (beneficios) iguales a 35^2

EPS



$$\Pi_B = q_B(100 - q_a - q_B) - 20q_B$$

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial q_B} = 100 - q_a - 2q_B - 20 = 0$$

$$\boxed{\frac{80 - q_a}{2} = q_B(q_a)}$$

$$\circ \text{ Si } q_a \uparrow \rightarrow \frac{\partial q_B(q_a)}{\partial q_a} = -\frac{1}{2}$$

$$\circ \; q_b(q_a^M)$$

$$\Pi_a = q_a(\underbrace{100-q_a}_{P}) - 50q_a$$

$$\frac{\partial \Pi_a}{\partial q_a} = 100 - 2q_a - 50 = 0$$

$$\boxed{25 = q_a^m}$$

$$q_b(q_a^m) = q_b(25) = \frac{80-25}{2} = \frac{55}{2} = 22.5$$

$\boxed{T=1}$

$$\Pi_a = q_a(100 - q_a - q_b) - 50q_a$$

$$\Pi_a = q_a\left(100 - q_a - \left(\frac{80-q_a}{2}\right)\right) - 50q_a$$

$$= q_a\left(60 - \frac{q_a}{2}\right) - 50q_a$$

$$\frac{\partial \Pi_a}{\partial q_a} = 60 - q_a - 50 = 0$$

$$q_a^{EPS} = 10$$

$$q_b^{EPS}(q_a) = \frac{80 - q_a}{2}$$

$\rightarrow$ EPS

Resultado asociado $\Rightarrow q_b = \frac{80-10}{2} = 35$

$$\Pi_b = 35(100-35-10) - 20(35)$$

$$= 35(55) - 20(35)$$

$$= 35(55-20) = 35^2$$

Considere un juego repetido infinitos periodos entre *Ana* y *Beto* en el cual en cada periodo se juega el siguiente juego en forma normal, y en cada periodo se observan las acciones escogidas por cada jugador en el periodo anterior (En cada casilla el primer pago corresponde a *Ana* y el segundo a *Beto*).

		OP1	Beto	OP3
		L	C	R
	T	(25,25)	(21,37)	(5,45)
Ana	M	(37,21)	(17,17)	(9,33)
	B	(45,5)	(33,9)	(13,13)

EN = (B, R)

	T	(25,25)	(21,37)	(5,45)
Ana	M	(37,21)	(17,17)	(9,33)
	B	(45,5)	(33,9)	(13,13)

Considere el siguiente perfil de estrategias de gatillo: En el periodo 0 Ana escoge T, y en cada periodo posterior escoge T si en cada periodo anterior se jugó (T, L) y escoge B si en algún periodo anterior no se jugó (T, L). En el periodo 0 $Beto$ escoge L, y en cada periodo posterior escoge L si en cada periodo anterior se jugó (T, L) y escoge R si en algún periodo anterior no se jugó (T, L). El mínimo factor de descuento de $Beto$ que se necesita para que este perfil de estrategias sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es igual a [Seleccionar] 5/8.

Ahora considere el siguiente perfil de estrategias de gatillo: En el periodo 0 Ana escoge T, y en cada periodo posterior escoge T si en cada periodo anterior se jugó (T, L) y escoge M si en algún periodo anterior no se jugó (T, L). En el periodo 0 $Beto$ escoge L, y en cada periodo posterior escoge

ANA (Beto es simétrico)

• $h_t \neq \{(T,L)\}_t \ \forall t$.

$$V^A_{ND} = \sum_{t=0}^{\infty} U_A(B,R)\delta^t$$

$$V^A_D = \boxed{U_A(\cdot, R)} + \sum_{t=1}^{\infty} U_A(B,R)\delta^t$$

$$V^A_{ND} = \boxed{U_A(B,R)} + \sum_{t=1}^{\infty} U_A(B,R)\delta^t$$

$$\boxed{V^A_{ND} > V^A_D}$$

//

• $h_t = \{(T,L)\}_t \ \forall t$

$$V^A_{ND} = \sum_{t=0}^{\infty} U_A(T,L)\delta^t = U_A(T,L)\sum_{\boxed{t=0}}^{\infty}\delta^t = 25\cdot\frac{1}{1-\delta}$$

$$V^A_D = U_A(B,L) + \sum_{t=1}^{\infty} U_A(B,R)\delta^t = 45 + U_A(B,R)\sum_{\boxed{t=1}}^{\infty}\delta^t = 45 + 13\,\frac{\delta}{1-\delta}$$

$$V^A_{ND} \geq V^A_D$$

$$\frac{25}{1-\delta} \geq 45 + \frac{13\delta}{1-\delta}$$

$$25 \geq 45(1-\delta) + 13\delta$$

$$25 \geq 45 - 45\delta + 13\delta$$

$$32\delta \geq 20$$

$$\delta \geq \frac{20}{32} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Ahora considere el siguiente perfil de estrategias de gatillo: En el periodo 0 Ana escoge T, y en cada periodo posterior escoge T si en cada periodo anterior se jugó (T, L) y escoge M si en algún periodo anterior no se jugó (T, L). En el periodo 0 $Beto$ escoge L, y en cada periodo posterior escoge L si en cada periodo anterior se jugó (T, L) y escoge C si en algún periodo anterior no se jugó (T, L). Si el factor de descuento de ambos jugadores es mayor a 5/7 este perfil de estrategias

[Seleccionar] NO perfecto en subjuegos.

$\boxed{\text{CASO 1}}$

$$h_t \neq \{(T,L)_t \ \forall t\}.$$

$$V_{ND} = \sum_{t=0}^{\infty} U_A(M,C)\delta^t$$

$$V_D = \boxed{U_A(B,C)}^{33} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U_A(M,C)\delta^t}$$

$$V_{ND} = \boxed{\underline{U_A(M,C)}}^{17} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U_A(M,C)\delta^t}$$

$$V_D > V_{ND}$$

CASO 2 $\quad h_t = \{(T,L)_t \ \forall t\}.$

2. (30 puntos) Considere una industria donde hay dos empresas A y B. El gobierno ha regulado esta industria imponiendo que el precio de venta del producto sea de 400 pesos (tanto A como B tienen que vender su producto a 400 pesos por unidad). Cada empresa puede escoger la calidad del producto que vende (c_i). La calidad que escogen las empresas afecta los costos de producción y la cantidad que venden, denotando $c_A \geq 0$ la calidad de la empresa A y $c_B \geq 0$ la calidad de la empresa B la demanda de cada empresa está dada por $\boxed{q_i = 100 + c_i - c_{-i}}$. El costo de producción de cada empresa depende de la cantidad que vende q_i, y de la calidad que escoge c_i, de acuerdo a la función de costos totales $\underline{CT_i(q_i, c_i) = c_i q_i}$. Cada empresa busca maximizar sus beneficios (ingresos-costos).

(a) (10 puntos) Suponga que las empresas deciden su calidad simultáneamente (es decir ninguna observa la calidad del competidor antes de decidir la suya). Encuentre el equilibrio de Nash de este juego y los beneficios que obtienen las empresas en equilibrio.

$$\max_{c_i} \pi_i = 400(100 + c_i - c_{-i}) - c_i(100 + c_i - c_{-i})$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial c_i} = 400 - 100 - 2c_i + c_{-i} = 0$$

$$\boxed{\frac{300 + c_{-i}}{2} = c_i = MR_i(c_{-i})}$$

Como emp. son simétricas

$\Rightarrow$ Busco un EN $c^* = c_i^* = c_{-i}^*$

$$\Rightarrow \frac{300 + c^*}{2} = c^*$$

$$300 + c^* = 2c^*$$

$$\boxed{300 = c^* = c_i^* = c_{-i}^*}$$

$$\Rightarrow \pi^* = 400(100) - 300(100) = 100^2 = 10{,}000$$

(b) (10 puntos) Suponga que el juego se repite infinitas veces y el factor de descuento, β, es el mismo para las dos empresas. Considere la siguiente estrategia de gatillo con reversión a Nash. En el primer periodo cada empresa escoge una calidad de cero ($c_A = 0, c_B = 0$), en los siguientes periodos cada empresa escoge una calidad de cero si en todos los periodos anteriores ambas empresas escogieron una calidad de cero, y escogen la calidad del equilibrio de Nash estático (inciso anterior) en caso de que en algún periodo anterior alguna empresa haya escogido una calidad positiva. ¿Para que factores de descuento, β, es este perfil de estrategias de gatillo un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos? Muestre su razonamiento.

<u>Caso 1</u>: $h_t \neq \{(c_A=0, c_B=0)_t\ \forall t\}$.

$$V_{ND} = \underline{\underline{\pi}}^{EN} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} \pi^{EN} \delta^t}$$

$$V_D = \boxed{\pi(c_i, c_{-i} = 300)} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} \pi^{EN} \delta^t}$$

$\wedge|$

π^{EN}

$$\boxed{V_{ND} \geq V_D}$$

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $h_t = h(C_A=0, C_B=0)_t \quad \forall t$

$$V_{ND} = \sum_{t=0}^{\infty} \pi(C_A=0, C_B=0)\,\delta^t = \pi(0,0)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t = \pi(0,0)\frac{1}{1-\delta}$$

$$V_D = \boxed{\pi(\underset{150 = MR^A(0)}{C_A}, C_B=0)} + \sum_{t=1}^{\infty} \pi^{EN}\delta^t$$

$$= \pi(150,0) + \pi^{EN}\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t = \pi(150,0) + \pi^{EN}\cdot\frac{\delta}{1-\delta}$$

$$\pi(0,0) = 400(100) - 0 = 40{,}000$$

$$\pi(150,0) = 400(100+150) - 150(100+150)$$

$$= 250(400-150) = 250^2 = 62{,}500$$

$$V_{ND} \geq V_D$$

$$40{,}000\cdot\frac{1}{1-\delta} \geq 62{,}500 + 10{,}000\cdot\frac{\delta}{1-\delta}$$

$1-\delta$ $1-\delta$

$$40\frac{1}{1-\delta} \geq 62.5 + 10\frac{\delta}{1-\delta}$$

$$40 \geq 62.5(1-\delta) + 10\delta$$

$$40 \geq 62.5 - 62.5\delta + 10\delta$$

$$52.5\delta \geq 22.5$$

$$\boxed{\delta \geq \frac{22.5}{52.5}}$$

(c) (10 puntos) Suponga que el juego se repite ~~...~~ T periodos, encuentre un equilibrio perfecto en subjuegos.

EPS $\rightarrow$ Jugar $C_i = 300$ $\forall t$

2. (35 puntos) Considere el siguiente juego de contribuciones voluntarias a un bien público. Hay dos personas A y B, y dos bienes X e Y. El bien X es un bien privado y el bien Y es un bien público. Hay mercados donde cada persona decide cuanto compra de cada producto, denotamos con (x_A, y_A) las cantidades que la persona A compra de los productos y con (x_B, y_B) las cantidades que B compra de los productos. Los precios de los productos son $p_X = 1$ y $p_Y = 1$. La persona A tiene un ingreso de 120 pesos y la persona B tiene un ingreso de 120 pesos. La utilidad de cada consumidor depende no solo de la cantidad que él compra sino también dependen de la cantidad del bien público que el otro compra (el se beneficia del bien público que el otro compra) y las funciones de utilidad son $u_A(x_A, y_A, y_B) = x_A(y_A + y_B)$ y $u_B(x_B, y_B, y_A) = x_B(y_B + y_A)$.

(a) (15 puntos) Suponga que cada consumidor decide cuánto compra de cada producto sin observar las cantidades que compra el otro. Encuentre las mejores respuestas de cada jugador, el(los) equilibrio(s) de Nash de este juego, y encuentre la cantidad total del bien público que habrá en esta economía. Grafique las mejores respuestas de los jugadores (únicamente del bien público) y muestre el equilibrio de Nash.

(b) (5 puntos) Escriba el problema para encontrar todos los perfiles de estrategias eficientes en el sentido de Pareto de este juego y muestre que, en equilibrio, se compra una cantidad menor que la eficiente del bien público.

(c) (5 puntos) Encuentre la asignación eficiente en el sentido de Pareto simétrica (en la cual cada consumidor compra la mitad de la cantidad total del bien público, es decir, $y_A = y_B$).

(d) (10 puntos) Suponga que este juego se repite infinitas veces, que el factor de descuento de cada persona es $\delta = 0.99$. ¿Existe algún equilibrio perfecto en subjuegos en el que en el sendero de juego en todos los periodos se jueguen las cantidades del inciso anterior (eficientes simétricas)? En caso afirmativo cuáles son las estrategias de este equilibrio y muestre que esas estrategias son un equilibrio perfecto en subjuegos, en caso negativo demuestre que no existe dicho equilibrio. Pista: considere estrategias de gatillo (trigger strategies) vistas en clase.

→ A

$$\max_{x_A, y_A} x_A(y_A + y_B) \quad \text{s.t.} \quad \overset{P_X}{1} \cdot x_A + \overset{P_Y}{1} \cdot y_A \le 120$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A}: \quad y_A + y_B - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = x_A - \lambda = 0$$

$$\frac{y_A + y_B}{x_A} = 1$$

$$\boxed{x_A = y_A + y_B}$$

$$x_A + y_A = 120$$

$$y_A + y_B + y_A = 120$$

$$2y_A + y_B = 120$$

MRA → $\boxed{y_A = \frac{120 - y_B}{2}}$

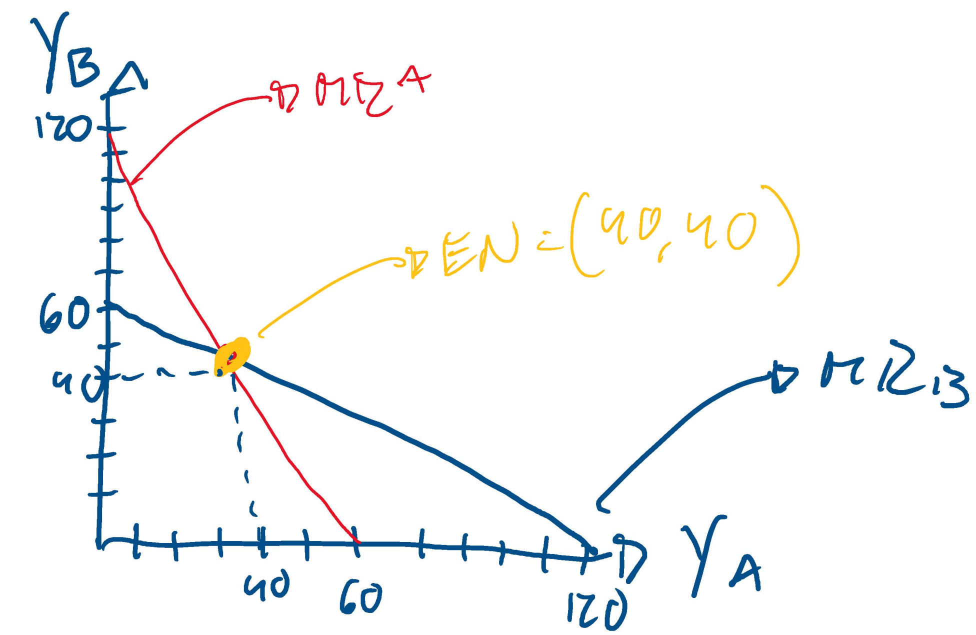
$$\boxed{MR_B = y_B = \frac{120 - y_A}{2}}$$

$$y_A^{EN} = y_B^{EN} = y^*$$

$$y^* = \frac{120 - y^*}{2}$$

$$2y^* = 120 - y^*$$

→ $$\boxed{\begin{array}{lll} x_A^{EN} = 80 & y_A^{EN} = 40 & Y_T^{EN} = 80 \\ x_B^{EN} = 80 & y_B^{EN} = 40 & \end{array}}$$



$3y^2 = 120$

$\boxed{y^2 = 40}$

(b) MAX $X_A(Y_A+Y_B)$ s.a $X_B(Y_A+Y_B) \geq \bar{U} \longrightarrow \lambda_1$

$\boxed{(X_A+X_B)P_x^{1} + (Y_A+Y_B)P_y^{1} \leq 240} \longrightarrow \lambda_2$

$$\frac{\partial y}{\partial X_A} = Y_A+Y_B - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial X_B} = \lambda_1(Y_A+Y_B) - \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{Y_A+Y_B}}{\lambda_1(\cancel{Y_A+Y_B})} = \cancel{1} \rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_A} = X_A + \lambda_1 X_B - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_B} = X_A + \lambda_1 X_B - \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Y_A+Y_B}{X_A+X_B} = 1 \Rightarrow \boxed{Y_A+Y_B = X_A+X_B}$$

$$(X_A+X_B) + (Y_A+Y_B) = 240$$

∂Y_B

$$2(Y_A+Y_B)=240$$

$$\boxed{Y_A+Y_B=120}$$

c) $\boxed{Y_A=60=Y_B}$ ✓

d) $$S_t^i=\begin{cases} Y_i=60 & \text{si } h_t=h(60,60)_t \ \forall t \\ Y_i=\underline{40} & \text{si } h_t\neq h(60,60)_t \ \forall t \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\text{CASO 1}}} \quad h_t\neq h(60,60)_t \ \forall t}$$

$$V_{ND}=\underline{U^{EN}(40,40)}+\boxed{\sum_{t=1}^{\infty}U^{EN}(40,40)}$$

$$V_D = \underbrace{U(0, 40)}_{\wedge\!\wedge} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U^{EN}(40, 40)}$$

$$U^{EN}(40,40)$$

$$\boxed{V_{ND} \geq V_D}$$

$$\boxed{\text{CASO 2} \qquad h_t = h(60,60)_t \quad \forall t \; G}$$

$$V_{ND} = \sum_{t=0}^{\infty} U(60,60)\,\delta^t = U(60,60)\frac{1}{1-\delta}$$

$$V_D = U(0, \underline{60}) + \sum_{t=1}^{\infty} U(40,40)\,\delta^t$$

$$30 = MR_i(60)$$

$$= U(30,60) + U(40,40) \cdot \frac{\delta}{1-\delta}$$

$$V_{ND} \geq V_D$$

$$\underline{U(60,60)} \frac{1}{1-\delta} \geq \underline{U(30,60)} + \underline{U(40,40)} \frac{\delta}{1-\delta}$$