Repaso Final A

Thursday, May 06, 2021 3:55 PM

2. (30 puntos) Dos amigos, Alberto y Begoña, van a poner una tintorería juntos. Begoña decidirá cuánto capital $k \in \mathbb{R}_+$ aportará, mientras que Alberto será el responsable del negocio y decidirá cuánto trabajo $l \in \mathbb{R}_+$ aportará (Begoña no aporta trabajo y Alberto no aporta capital). La decisión es simultánea. Dado (k, l) la tintorería tendrá ganancias iguales a $\sqrt{kl}$ las cuales se dividen 50 % cada uno. El costo del trabajo es $\frac{l^2}{4}$ el cual paga Alberto (es el costo de oportunidad del tiempo de Alberto) el costo del capital es $\frac{k}{4}$ el cual paga Begoña (es el costo de oportunidad del capital de Begoña).

(a) (15 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego y sus pagos.

(b) (10 puntos) Suponga que este juego se repite dos periodos $t = 1, 2$ y para este inciso suponga que el factor de descuento es igual a 1. Considere el perfil de estrategias donde en $t = 1$ Alberto pone $\frac{2}{3}$ unidades de trabajo, y en $t = 2$ Alberto pone 0.5 unidades de trabajo en caso de en el periodo anterior se hayan puesto $\frac{2}{3}$ unidades de trabajo y $\frac{32}{27}$ unidades de capital, y pone 0 en otro caso; en $t = 1$ Begoña pone $\frac{32}{27}$ unidades de capital, y en $t = 2$ Begoña pone 0.5 unidades de capital en caso de en el periodo anterior se hayan puesto $\frac{2}{3}$ unidades de trabajo y $\frac{32}{27}$ unidades de capital, y pone 0 en otro caso. ¿Este perfil es un equilibrio perfecto en subjuegos? SI ✓

(c) (5 puntos) Suponga que este juego se repite infinitos periodos. Encuentre para qué valores del factor de descuento sería equilibrio perfecto en subjuegos una estrategia de gatillo donde se inicia con $(l, k) = (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ y, mientras en cada periodo anterior se haya observado cantidades de trabajo y capital $(l, k) = (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$, se mantienen jugando $(l, k) = (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ pero si, en algún periodo pasado alguien se desvió, de ahí en adelante se jugará $(l, k) = (0, 0)$.

a)

$\Pi_A = \frac{1}{2} k^{1/2} l^{1/2} - \frac{l^2}{4}$

$\Pi_B = \frac{1}{2} k^{1/2} l^{1/2} - \frac{k}{4}$

$\Pi_A\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right) = 0.3333$

$\Pi_B\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right) = 0.1481$

$\Pi_B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 0.1666$

A

$\frac{\partial \Pi_A}{\partial l} = \frac{1}{4}\frac{k^{1/2}}{l^{1/2}} - \frac{l}{2} = 0$

$\frac{1}{2}\frac{k^{1/2}}{l^{1/2}} = l$

$\frac{1}{2} k^{1/2} = l^{3/2}$

$\frac{1}{4} k = l^3$

$\left(\frac{1}{4}k\right)^{1/3} = l = MR_A(k) \rightarrow \frac{1}{4}k = l^3$

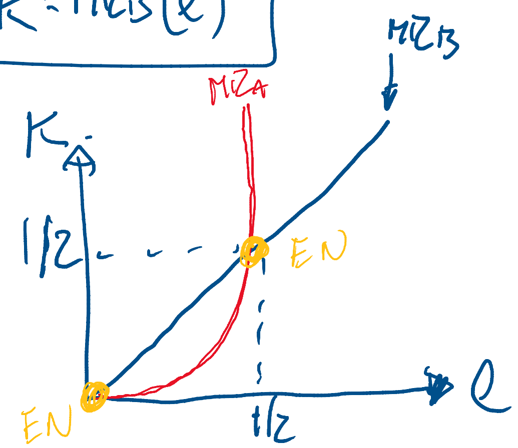
$k = 4l^3$

B

$\frac{\partial \Pi_B}{\partial k} = \frac{1}{4}\frac{l^{1/2}}{k^{1/2}} - \frac{1}{4} = 0$

$l^{1/2} = k^{1/2}$

$\boxed{l = k = MR_B(l)}$



$l = k$

$\left(\frac{1}{4}k\right)^{1/3} = l = k$

$\boxed{\frac{1}{4}k = k^3}$

$0 = k^3 - \frac{1}{4}k$

$0 = k\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)$

$EN = \begin{cases} \boxed{l = 0, k = 0} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\Pi_A = 0 \\ \Pi_B = 0\end{matrix}} \\ \boxed{l = 1/2, k = 1/2} \rightarrow \Pi_A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16} > 0$

$0 = k(\ldots 4)$

$$\boxed{k = 0 \quad ó \quad k = \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\ldots 4) - \frac{1}{4}(4)\ \frac{1}{16} > 0$$

$$\Pi_B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \geq 0$$

$$\boxed{B}$$

$\boxed{T=1}$ $\boxed{A}$

No DesV $\rightarrow$ $$\boxed{\underbrace{U_A\left(l = \frac{2}{3},\ k = \frac{32}{27}\right)}_{t=1}} + \boxed{U_A(l = 0.5,\ k = 0.5)\,\delta} \rightarrow 1$$

$$\wedge \qquad\qquad\qquad \vee$$

DesV $\rightarrow$ $$\boxed{U_A\left(l,\ k = \boxed{\frac{32}{27}}\right)} + \boxed{U_A(l = 0,\ k = 0)}$$

$$l = \underbrace{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{32}{27}\right)^{1/3}}_{MR_A\left(\frac{32}{27}\right)} = 0.66666 = 2/3$$

$$\boxed{ND \succ_A DesV}$$

$\boxed{B}$

$$\text{NO DesV} = U_B\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right) + \underline{U_B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \boxed{0.1481} + \boxed{\frac{1}{8}} = 0.2731$$

$$\text{DesV} = U_B\left(\frac{2}{3}, K\right) + \underline{U_B(0,0)} = \boxed{0.1666} + \boxed{0} = 0.1666$$

$$MR_B\left(\frac{2}{3}\right) = 2/3$$

$$\boxed{\text{No DesV} \succ_B \text{DesV}}$$

(C) Caso 1: $\boxed{h_t \neq h\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)} \; \forall t \; h$

A

$$V^A_{ND} = \underbrace{U^A(0,0)}_{VI} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U^A(0,0)}$$

B

$$V^B_{NO} = \underbrace{U^B(0,0)}_{VI} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U^B(0,0)}$$

$$V_D^A = \underbrace{U^A(\ell, 0)}_{} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U^A(0,0)} \quad = \quad V_D^B = \underbrace{U^B(0, K)}_{} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U^B(0,0)}$$

$$V_{ND}^A \geq V_D^A \quad = \quad V_{ND}^B \geq V_D^B$$

// //

Caso 2 $\quad h_t = \{(\frac{2}{3}, \frac{32}{27})_t \quad \forall t\}$

A

$$V_{ND}^A = \sum_{t=0}^{\infty} U_A\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)\delta^t$$

$$= U_A\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right) \cdot \frac{1}{1-\delta}$$

$$= \boxed{U_A\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U_A\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)\delta^t}$$

$$V_D^A = \boxed{U_A\left(\ell, \frac{32}{27}\right)} + \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} U_A(0,0)\delta^t}$$

B

$$V_{ND}^B = \sum_{t=0}^{\infty} U_B\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)\delta^t$$

$$= U_B\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right) \cdot \frac{1}{1-\delta} = 0.1481 \cdot \frac{1}{1-\delta}$$

$$= U_B\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right) + \sum_{t=1}^{\infty} U_B\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)\delta^t$$

$$V_D^B = U_B\left(\frac{2}{3}, K\right) + \sum_{t=1}^{\infty} U_B(0,0)\delta^t$$

$$\boxed{V_{ND}^{A} \geq V_{D}^{A}}$$

$$= U_B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \cancel{U_B(0,0)} \boxed{\frac{\delta}{1-\delta}}$$

$$= 0.1666$$

$$V_{ND}^{B} \geq V_{D}^{B}$$

$$0.1481 \cdot \frac{1}{1-\delta} \geq 0.1666$$

$$\frac{0.1481}{0.1666} \geq 1-\delta$$

$$\boxed{\delta \geq 1 - \frac{0.1481}{0.1666} = 0.1113}$$

Pregunta 6 10 pts

Considere el siguiente juego en forma normal entre Carlos y Daniela, donde en el vector de pagos el primer pago es para Carlos y el segundo es para Daniela, y conteste las siguientes 3 preguntas.

		Daniela		
		r	~~s~~	t
Carlos	u	(3,7)	~~(8,6)~~	(4,3)
	d	(2,2)	~~(10,1)~~	(5,5)

En este juego existen [Seleccionar] 2 equilibrios de Nash en estrategias puras.

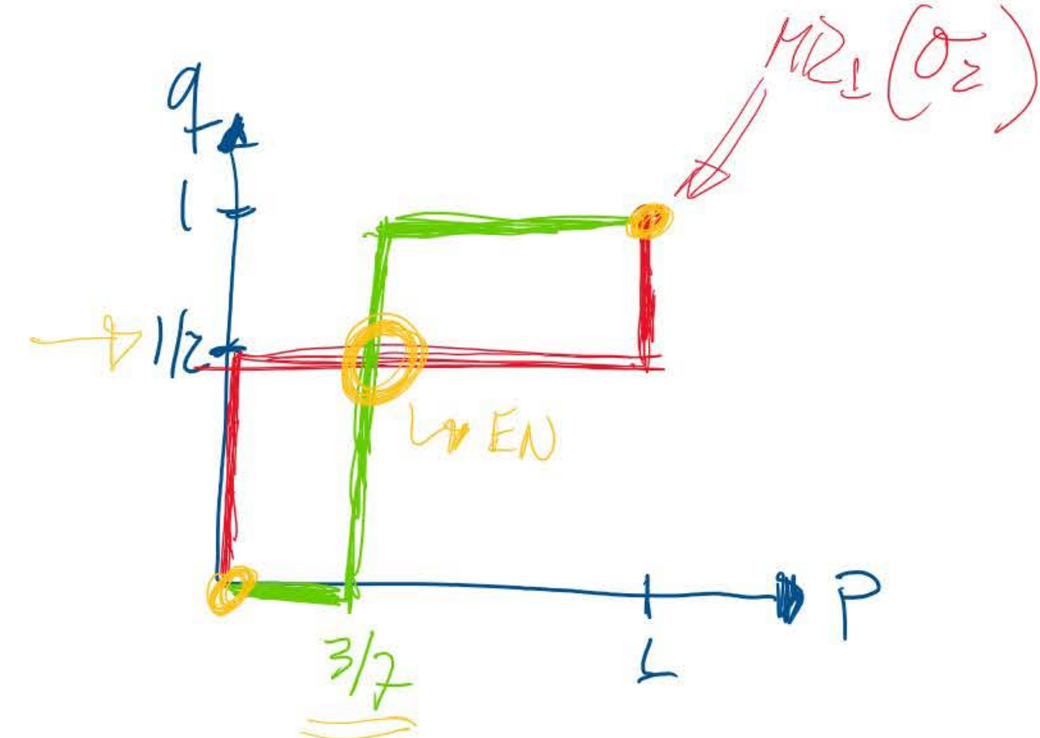
En este juego existen [Seleccionar] 3 perfiles de estrategias eficientes en el sentido de Pareto.

En este juego en el equilibrio de Nash en estrategias mixtas Carlos juega su estrategia u con probabilidad [Seleccionar] 3/7, y Daniela juega su estrategia r con probabilidad [Seleccionar] 1/2.

$EN = \{(u,r), (d,t)\}$

$r \succ s$

		q	$1-q$
		r	t
p	u	3, $\boxed{7}$	4, $\boxed{3}$
$1-p$	d	2, $\boxed{2}$	5, $\boxed{5}$



Carlos

$MR_1(\sigma_2 = (q, 1-q))$

$$U_1(u, \sigma_2) = 3 \cdot q + 4(1-q) = 3q + 4 - 4q = 4 - q$$

$$U_1(d, \sigma_2) = 2 \cdot q + 5(1-q) = 2q + 5 - 5q = 5 - 3q$$

$u \succsim d$ $\quad$ $d \succsim u$ $\quad$ $d \sim u$

$4 - q \geq 5 - 3q$ $\quad$ $q \leq 1/2$ $\quad$ $q = 1/2$

$2q \geq 1$

$\boxed{q \geq \frac{1}{2}}$

$MR_2(\sigma_1 = (p, 1-p))$

$U_2(\sigma_1, r) = 7p + 2(1-p) = 7p + 2 - 2p = 5p + 2$

$U_2(\sigma_1, t) = 3p + 5(1-p) = 3p + 5 - 5p = 5 - 2p$

$r \geq t$

$5p + 2 \geq 5 - 2p$

$7p \geq 3$

$p \geq \frac{3}{7}$

$t \geq r$

$p \leq \frac{3}{7}$

$t \sim r$

$p = \frac{3}{7}$