Repaso Final B

Tuesday, May 11, 2021 2:27 PM

2. (35 puntos) Considere el siguiente juego de contribuciones voluntarias a un bien público. Hay dos personas A y B, y dos bienes X e Y. El bien X es un bien privado y el bien Y es un bien público. Hay mercados donde cada persona decide cuanto compra de cada producto, denotamos con (x_A, y_A) las cantidades que la persona A compra de los productos y con (x_B, y_B) las cantidades que B compra de los productos. Los precios de los productos son $p_X = 1$ y $p_Y = 1$. La persona A tiene un ingreso de 120 pesos y la persona B tiene un ingreso de 120 pesos. La utilidad de cada consumidor depende no solo de la cantidad que él compra sino también dependen de la cantidad del bien público que el otro compra (el se beneficia del bien público que el otro compra) y las funciones de utilidad son $u_A(x_A, y_A, y_B) = x_A(y_A + y_B)$ y $u_B(x_B, y_B, y_A) = x_B(y_B + y_A)$.

   (a) (15 puntos) Suponga que cada consumidor decide cuánto compra de cada producto sin observar las cantidades que compra el otro. Encuentre las mejores respuestas de cada jugador, el(los) equilibrio(s) de Nash de este juego, y encuentre la cantidad total del bien público que habrá en esta economía. Grafique las mejores respuestas de los jugadores (únicamente del bien público) y muestre el equilibrio de Nash.

   (b) (5 puntos) Escriba el problema para encontrar todos los perfiles de estrategias eficientes en el sentido de Pareto de este juego y muestre que, en equilibrio, se compra una cantidad menor que la eficiente del bien público.

   (c) (5 puntos) Encuentre la asignación eficiente en el sentido de Pareto simétrica (en la cual cada consumidor compra la mitad de la cantidad total del bien público, es decir, $y_A = y_B$).

   (d) (10 puntos) Suponga que este juego se repite infinitas veces, que el factor de descuento de cada persona es $\delta = 0.99$. ¿Existe algún equilibrio perfecto en subjuegos en el que en el sendero de juego en todos los periodos se jueguen las cantidades del inciso anterior (eficientes simétricas)? En caso afirmativo cuáles son las estrategias de este equilibrio y muestre que esas estrategias son un equilibrio perfecto en subjuegos, en caso negativo demuestre que no existe dicho equilibrio. Pista: considere estrategias de gatillo (trigger strategies) vistas en clase.

a) $\max\limits_{x_a, y_a} \; x_a(y_a + y_b)$ s.a $\cancel{P_x}^{1} x_a + \cancel{P_y}^{1} y_a \leq 120$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a} = (y_a + y_b) - \lambda \cancel{P_x}^{1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_a} = x_a - \lambda \cancel{P_y}^{1} = 0$$

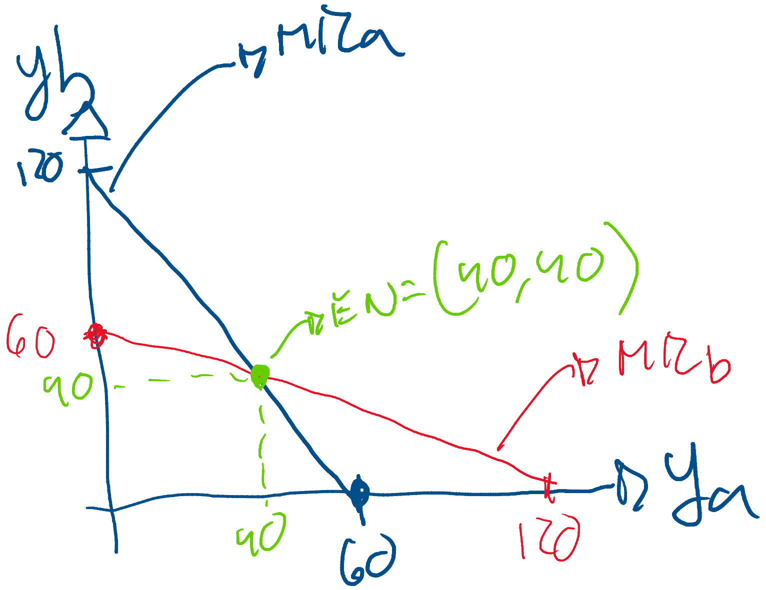
$$\frac{y_a + y_b}{x_a} = 1$$

$$y_a + y_b = x_a$$

$$\cancel{P_x}^{1} x_a + \cancel{P_y}^{1} y_a = 120$$

$$y_a + y_b + y_a = 120$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_a &= \frac{120 - y_b}{2} = MR_a(y_b) \\ y_b &= \frac{120 - y_a}{2} = MR_b(y_a) \end{aligned}}$$



EN UN EN. SIMETRICO $y_a = y_b = y^*$

$$y^* = \frac{120 - y^*}{2}$$

$$2y^* = 120 - y^*$$

$$3y^* = 120$$

$$y^* = 40$$

$\check{y}^* = 40$

$$\boxed{Y^* = y_a^* + y_b^* = 80}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &X_a + Y_a = 120 \\ &X_a^* = 80 \\ &X_b^* = 80 \end{aligned}}$$

(b) $\max_{x_a, x_b, y_a, y_b} \; X_a(Y_a + Y_b)$ s.t. $X_b(Y_a + Y_b) \geq \bar{U} \rightarrow \lambda_1$

$\cancel{P_x}^{1}(X_a + X_b) + \cancel{P_y}^{1}(Y_a + Y_b) \leq 240 \rightarrow \lambda_2$

$$\frac{\partial y}{\partial X_a} = Y_a + Y_b - \lambda_2 \cdot \cancel{P_x}^{1} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial X_b} = \lambda_1(Y_a + Y_b) - \lambda_2 \cancel{P_x}^{1} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_a} = X_a + \lambda_1 X_b - \lambda_2 \cancel{P_y}^{1} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_b} = X_a + \lambda_1 X_b - \lambda_2 \cancel{P_y}^{1} = 0$$

$$\frac{\cancel{Y_a + Y_b}}{\lambda_1 (\cancel{Y_a + Y_b})} = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_a + Y_b}{X_a + X_b} = 1 \rightarrow \boxed{Y_a + Y_b = X_a + X_b}$$

$$(Y_a + Y_b)\cancel{P_y}^{1} + (X_a + X_b)\cancel{P_x}^{1} = 240$$

$$2(Y_a + Y_b) = 240$$

$$\boxed{Y_a^{op} + Y_b^{op} = 120}$$

$\boxed{C}$ $y_a^{op} = y_b^{op} = 60$

2 preguntas. Para las siguientes dos preguntas considere el siguiente juego en forma normal, donde en cada celda de la matriz el primer pago corresponde al pago de Ernesto y el segundo al de Fernanda. Denotamos con (p_A,p_B) las probabilidades de que Ernesto juegue A y B en una estrategia mixta y con (p_i, p_c, p_d) las probabilidades de que Fernanda juegue i, c y d en una estrategia mixta.

$\mathbb{E}\left(U_F\left(\sigma_E = (0.25, 0.75), i\right)\right) = 0.25(5) + 0.75(5) = 5$

$\mathbb{E}\left(U_F\left(\sigma_E = (0.25, 0.75), c\right)\right) = 0.25(7) + 0.75(4) = 4.75$

$\mathbb{E}\left(U_F\left(\sigma_E = (0.25, 0.75), d\right)\right) = 0.25(1) + 0.75(6) = 4.75$

		Fernanda		
		i	c	d
Ernesto	A	(4,5)	(6,7)	(3,1)
	B	(6,5)	(4,4)	(1,6)

7. En este juego si Ernesto juega $p_A = 0.25$ y $p_B = 0.75$

   ~~(a)~~ una mejor respuesta de Fernanda es jugar d con probabilidad 1 (jugar $p_i = 0$, $p_c = 0$, $p_d = 1$)

   (b) Fernanda estará indiferente entre jugar c y d ✓ [DAN LA MISMA $\mathbb{E}(U_F)$]

   ~~(c)~~ una mejor respuesta de Fernanda es jugar c con probabilidad 1 (jugar $p_i = 0$, $p_c = 1$, $p_d = 0$)

   ~~(d)~~ todas las anteriores

8. En este juego podemos asegurar que:

   (a) existe un equilibrio de Nash donde $\boxed{p_A = 0.25 \text{ y } p_B = 0.75}$

   (b) existe un equilibrio de Nash donde $p_i > 0$, $p_c > 0$ y $p_d > 0$

   (c) existe un equilibrio de Nash donde $\boxed{p_A = \frac{1}{3}\ p_B = \frac{2}{3}}$ → $EN = \left(\sigma_E = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \sigma_F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\right)$

   (d) no existen equilibrios de Nash en estrategias estrictamente mixtas (strictly mixed) ya que existe uno en estrategias puras

a) $MR_F(\sigma_E = (0.25, 0.75)) = \underline{i}$

$MR_E(\underline{i}) = \underline{B} = (\sigma_E = (0,1)) \neq (\sigma_E = (0.25, 0.75))$

NO ES EQ!

(b) =

(c) $\boxed{\sigma_E = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

$$\mathbb{E}(U_F(\sigma_E, i)) = 5\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{2}{3} = \underline{5}$$

$$\mathbb{E}(U_F(\sigma_E, c)) = 7\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{15}{3} = \underline{5}$$

$$\mathbb{E}(U_F(\sigma_E, d)) = 1\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{2}{3} = \frac{13}{3} = 4.33$$

$$MR_F(\sigma_E) = \left\{ \sigma_F = \underline{(P_i, 1-P_i, \overset{\cancel{P_d}}{0})} \right. \quad \left\{ \right.$$

$$\mathbb{E}(U_E(A, \sigma_F = (P_i, 1-P_i, 0))) = 4\cdot P_i + 6(1-P_i) + 3\cdot 0 = \underline{6-2P_i}$$

$$\mathbb{E}(U_B(B, \sigma_F = (P_i, 1-P_i, 0))) = 6\cdot P_i + 4(1-P_i) + 1\cdot 0 = \underline{2P_i + 4}$$

$$\Rightarrow 6 - 2P_i = 2P_i + 4$$

$$2 = 4P_i$$

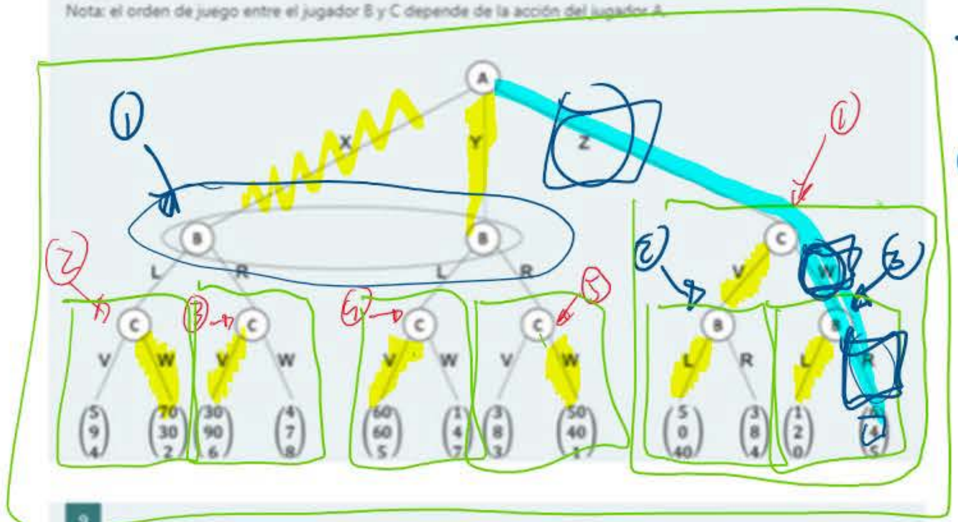
$$\frac{2}{4} = P_i$$

$\boxed{\tfrac{1}{2} = P_i}$

$\boxed{y \quad \frac{1}{2} = P_i}$

4 preguntas. Considere el siguiente juego para contestar las siguientes 4 preguntas.

En los vectores de pago el pago superior es del jugador A, el pago medio es del jugador B, el pago inferior es del jugador C.
Nota: el orden de juego entre el jugador B y C depende de la acción del jugador A.



$S_A = \{X, Y, Z\}.$

$S_B = \{(2 \times 2 \times 2 \;,\;,\;)\} = 8$ opciones $= (LLL, LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR)$

① ② ③

$S_C = \{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \;,\;,\;,\;,\;)\} = 2^5 = 32$

① ② ③ ④ ⑤

9

En el juego el jugador B tiene _______ estrategias y el jugador C tiene _______ estrategias.
(4 Points)

- 8. 32
- 16. 32
- 4. 8
- 6. 10

10

En este juego existen __8__ subjuegos incluyendo al juego completo.
(4 Points)

- 8
- 2
- 6
- 10

$S_A = \{Z\}$

$S_B = \{(\;, R, R)\}.$

$S_C = \{(V, W, W, V, W)\}.$

11

Considerando únicamente estrategias puras en este juego existen __2__ equilibrios perfectos en subjuegos.
(4 Points)

$EPS = \{S_A = Z,\; S_B = (LRR),\; S_C = (VWWVW)\}$

11

Considerando únicamente estrategias puras en este juego existen 2 equilibrios perfectos en subjuegos.
(4 Points)

- 5
- 7
- 1
- 2

EPS = $\{S_A = Z,\ S_B = (LRR),\ S_C = (VWWVW)\}$,

$\{S_A = Z,\ S_B = RRR,\ S_C = \underline{\underline{VWWVW}}\}$

12

En equilibrio perfecto en subjuegos (en el sendero de equilibrio) podemos asegurar que el jugador A jugará Z y el jugador C escogerá W.
(4 Points)

- Z: W
- Y: V
- X: W
- ninguna de las anteriores

2. (30 puntos) Dos amigos, Alberto y Begoña, van a poner una tintorería juntos. Begoña decidirá cuánto capital $k \in \mathbb{R}_+$ aportará, mientras que Alberto será el responsable del negocio y decidirá cuánto trabajo $l \in \mathbb{R}_+$ aportará (Begoña no aporta trabajo y Alberto no aporta capital). La decisión es simultánea. Dado (k, l) la tintorería tendrá ganancias iguales a $\sqrt{kl}$ las cuales se dividen 50 % cada uno. El costo del trabajo es $\frac{l^2}{4}$ el cual paga Alberto (es el costo de oportunidad del tiempo de Alberto) el costo del capital es $\frac{k}{4}$ el cual paga Begoña (es el costo de oportunidad del capital de Begoña).

   (a) (15 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego y sus pagos.

   (b) (10 puntos) Suponga que este juego se repite dos periodos $t = 1, 2$ y para este inciso suponga que el factor de descuento es igual a 1. Considere el perfil de estrategias donde en $t = 1$ Alberto pone $\frac{2}{3}$ unidades de trabajo, y en $t = 2$ Alberto pone 0.5 unidades de trabajo en caso de en el periodo anterior se hayan puesto $\frac{2}{3}$ unidades de trabajo y $\frac{32}{27}$ unidades de capital, y pone 0 en otro caso; en $t = 1$ Begoña pone $\frac{32}{27}$ unidades de capital, y en $t = 2$ Begoña pone 0.5 unidades de capital en caso de en el periodo anterior se hayan puesto $\frac{2}{3}$ unidades de trabajo y $\frac{32}{27}$ unidades de capital, y pone 0 en otro caso. ¿Este perfil es un equilibrio perfecto en subjuegos?

   (c) (5 puntos) Suponga que este juego se repite infinitos periodos. Encuentre para qué valores del factor de descuento sería equilibrio perfecto en subjuegos una estrategia de gatillo donde se inicia con $(l, k) = (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ y, mientras en cada periodo anterior se haya observado cantidades de trabajo y capital $(l, k) = (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$, se mantienen jugando $(l, k) = (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ pero si, en algún periodo pasado alguien se desvió, de ahí en adelante se jugará $(l, k) = (0, 0)$.

a) $U_A = \frac{1}{2}\sqrt{kl} - \frac{l^2}{4}$

$$U_B = \frac{1}{2}\sqrt{k\ell} - \frac{k}{4}$$

$$\frac{\partial U_A}{\partial \ell} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\ell}} - \frac{\ell}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}k^{1/2}\ell^{-1/2} = \ell$$

$$\frac{1}{2}k^{1/2} = \ell^{3/2}$$

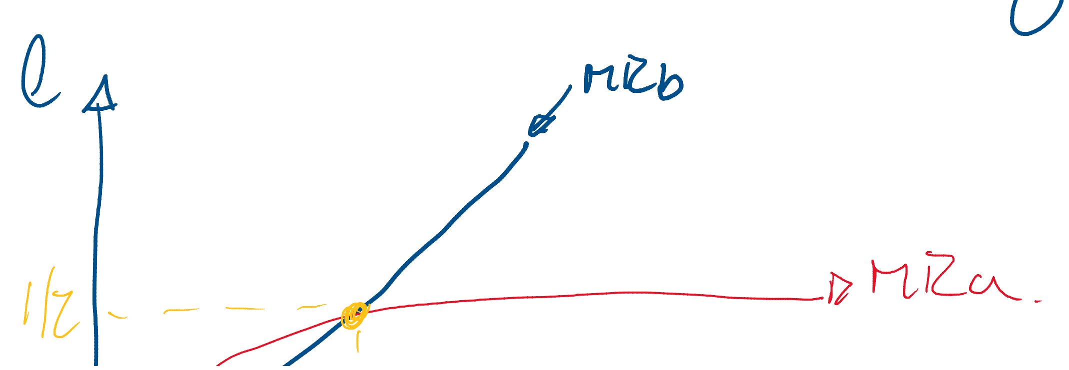
$$\frac{1}{4}k = \ell^3$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}k} = \ell = MR_A(k)$$

$$\frac{\partial U_B}{\partial k} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\sqrt{\ell} = \sqrt{k}$$

$$\ell = k = MR_B(\ell)$$



$$MR\left(\frac{32}{27}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\,\frac{32}{27}} = 0.666 = 2/3$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}k} = k$$

$$\frac{1}{4}k = k^3$$

$$0 = k^3 - \frac{1}{4}k$$

$$0 = k\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)$$

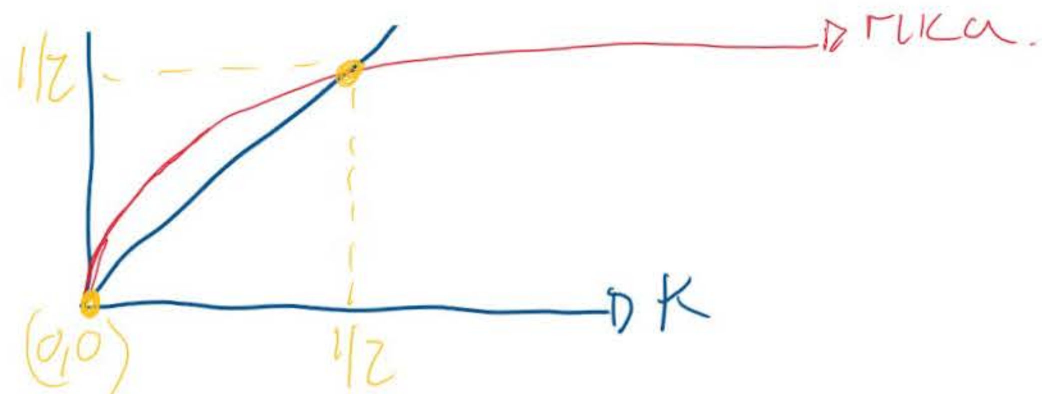
$$\boxed{k^* = 0 = \ell^*}$$

$\Pi_A = 0$
$\Pi_B = 0$

E. N.

$$\boxed{k^* = \frac{1}{2},\ \ell^* = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Pi_A &= 0.1875\\ \Pi_B &= 0.125\end{aligned}}$$



b $\boxed{T=1}$

Ana

$$\boxed{V^A_{ND} \geq V^A_D}$$

$$U^{t=1}\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right) + \delta U^{t=2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = V_{ND}$$

$$U^{t=1}\left(\boxed{\cdot}, \frac{32}{27}\right) + \delta U^{t=2}(0,0) = V_D$$

$$V_{ND} = 0.33 + 0.1875$$

$$V^A \quad V^A$$

B

$$\boxed{V^B_{ND} \geq V^B_D}$$

$$V^B_{ND} = U\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right) + \delta U\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.1481 + 0.125$$

$$V_D = V\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \delta U(0,0) = 0.1666 + 0$$

$MRB\left(\frac{2}{3}\right)$

$$V^B_{ND} > V^B_D$$

$V_{UD}^{A} \geq V_{D}^{A}$