Autor: Mauricio Romero
Correo: mtromero@itam.mx
Fecha: 24 Marzo, 2020

1 Preambulo

Supongamos que existen I consumidores y denotamos el conjunto de consumidores por $\mathcal{I} = \{1, ...I\}$. Cada consumidor $i$esta caracterizado por una función de utilidad u^i que representa sus preferencias sobre el espacio de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$ y una canasta o dotación inicial $w^i \in \mathbb{R}^L_+$ de los bienes de consumo. Es decir, las características del consumidor son la pareja $\left(u^i, w^i\right)$.

Definición 1 (Economía de intercambio) *Una economía de intercambio es $\mathcal{E} = (\mathcal{I}, \left(u^i, w^i\right)_{i\in\mathcal{I}})$ donde $\mathcal{I}$ es el conjunto de agentes, u^i es una representación de las preferencias de cada consumidor y w^i son las dotaciones iniciales.*

Definición 2 (Dotación total de la economía) *Denotamos por $w = \sum_{i=1}^I w^i$ la totalidad de los recursos de la economía.*

Definición 3 (Distribución o asignación factible) *Una distribución de recursos es un vector de canastas de consumo, uno para cada consumidor, $x = (x^1, x^2, ..., x^I)$ y $x^i \in \mathbb{R}^L_+$. Tambien podemos denotar la distribución de recursos por $x \in \mathbb{R}^{IL}_+$. Una distribución de recursos x es factible en la economía $\mathcal{E}$ si $\sum_{i=1}^I x^i = w$*

2 Eficiencia

Definición 4 (Eficiencia de Pareto) *Sea $\mathcal{E}$ una economía. Decimos que un redistribución de recursos $x = (x^1, x^2, ..., x^I)$ es eficiente en el sentido de Pareto (o es una asignación de Pareto) si no existe otra redistribución de recursos $\widehat{x} = (\widehat{x}^1, \widehat{x}^2, ..., \widehat{x}^I)$ tal que para todo agente i, $u^i(\widehat{x}^i) \geq u^i(x^i)$ y para al menos un agente i^*, $u^{i^*}(\widehat{x}^{i^*}) > u^{i^*}(x^{i^*})$*

Nota 1 *Para la definición de eficiencia de Pareto las dotaciones individuales no son importantes más allá de que ellas determinan el tamaño de la caja de Edgeworth (y debería ser obvio que, en general, para una caja dada hay infinidad de posibles pares de dotaciones que la generan como Caja de Edgeworth)*

Nota 2 *Se dice que $\widehat{x}$ Pareto domina a x si para todo agente i, $u^i(\widehat{x}^i) \geq u^i(x^i)$ y para al menos un agente i^*, $u^{i^*}(\widehat{x}^{i^*}) > u^{i^*}(x^{i^*})$.*

Nota 3 *Puede haber muchos optimos de Pareto en una economía. Que algo sea un optimo de Pareto* ***no*** *quiere decir que pareto domina a todas las demas asignaciones.*

Definición 5 (Curva de contrato) *El conjunto de todos los puntos de Pareto de una economía es conocido como su curva de contrato*

Nota 4 *En general para buscar los optimos de Pareto se soluciona el siguiente problema:*

$$\max_{x^1,...,x^I} u^i(x)$$

$$\text{sujeto a}$$

$$u^1(x^1) \geq \overline{U^1}$$

$$\vdots$$

$$u^{i-1}(x^{i-1}) \geq \overline{U^{i-1}}$$
$$u^{i+1}(x^{i+1}) \geq \overline{U^{i+1}}$$

$$\vdots$$

$$u^I(x^I) \geq \overline{U^I}$$

$$\sum_{i=1}^I x^i = w$$

3 Equilibrio general

El analisis de equilibrio general tiene los siguientes supuestos detras:

- Existe un mercado centralizado para cada bien por el cual los agentestienen preferencias.
- Todos los agentes tiene accesso sin costo alguno, al mercado centralizado.
- Existe un precio único para cada bien y todos los consumidores conocen perfectamente el precio de éstos.
- Cada consumidor puede vender su dotación inicial en el mercado a los precios dados y utilizar el pago resultante (en la unidad de conteo) para demandar los bienes que más desea.
- Los consumidores buscan maximizar su utilidad dada la restricción presupuestal e independientemente de las acciones de los demás consumidores. En este sentido, el mecanismo expuesto es completamente descentralizado e impersonal. Ningún agente necesita saber nada de los demás, ni sus preferencias ni sus dotaciones iniciales.
- Competencia perfecta. Los consumidores toman los precios como dados y no creen tener ningún influencia sobre estos por causa de sus decisiones. Ni cuando intercambian su dotación inicial por un ingreso, ni cuando demandan bienes sujetos a su restricción presupuestal.

- La única fuente de información que los agentes utilizan para tomar sus decisiones de consumo son los precios y nada más.

Definición 6 (Equilibrio general) *Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio. Un equilibrio (general) con competencia perfecta para la economía de intercambio $\mathcal{E}$ es un par $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^{IL}_+$ compuesto por un vector de precios p^* y una asignación de recursos x^* tal que:*

1. *Cada agente maximice su utilidad a los precios dados. Para todo $i \in \mathcal{I}$*

$$x^{*i} = \underset{p^* \cdot x^i \leq p^* \cdot w^i}{arg\,max}\, u^i(x)$$

2. *Todos los mercados se ajusten (i.e., se equilibran):*

$$\sum_{i=1}^{I} x^{*i} = \sum_{i=1}^{I} w^i$$

Nota 5 *Cuando la restricción presupuestal de un agente está dada por el valor de una dotación,su demanda no cambia si uno multiplica todos los precios por una constante positiva. Por esta razón, en cualquier ecconomía hay un número infinito de vectores de precios de equilibrio: si $p = (p_1, p_2)$ es un vector de precios de equilibrio, también lo son $(2p_1, 2p_2)$, $\left(\frac{1}{9}p_1, \frac{1}{9}p_2\right)$, $(500p_1, 500p_2)$ y, en general, cualquier producto de p por un número positivo. Por esta razón, uno suele "normalizar" los precios fijando, por ejemplo, $p_1 = 1$ o requiriendo que $p_1 + p_2 = 1$.*

Nota 6 *La definición de Equilibrio General carece de un mecanismo natural que explique cómo evoluciona la economía cuando uno se encuentra por fuera de equilibrio.*

Teorema 1 (La ley de Walras) *En una economía de intercambio con L bienes, si los agentes escogen sus demandas óptimamente, el equilibrio entre oferta y demanda en $L-1$ de los mercados implica el mismo equilibrio en el mercado restante.*

Proof. Si la canasta x^i es óptima para el agente i a los precios p (es decir, si satisface la condición (1) de la definición anterior), entonces debe satisfacer que

$$\sum_{l=1}^{L} p_l x_l^i = \sum_{l=1}^{L} p_l w_l^i$$

Sumando para todos los agentes, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} p_l x_l^i = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} p_l w_l^i$$

lo que podemos reescribir como

$$\sum_{l=1}^{L} \left(p_l \sum_{i=1}^{I} \left(x_l^i - w_l^i \right) \right) = 0$$

Ahora, supongamos que para los $L-1$ primeros bienes el mercado se ha equilibrado, de forma tal que para todo $l = 1, 2, ..., L-1$

$$\sum_{i=1}^{I} \left(x_l^i - w_l^i \right) = 0$$

Esto implica que

$$p_L \sum_{i=1}^{I} \left(x_L^i - w_L^i \right) = 0$$

y como, bajo nuestros supuestos, $p_L > 0$, se sigue que el L-ésimo mercado también debe estar en equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{I} \left(x_L^i - w_L^i \right) = 0$$

■

Definición 7 (Exceso de demanda) *Definamos la demanda agregada de la economía (como funci ón únicamente de los precios), $F(p)$ como:*

$$F(p) = \sum_{i=1}^{I} f^i(p)$$

y la función de exceso de demanda (como función unicamente de los precios) como:

$$Z(p) = (Z_1(p), Z_2(p), ..., Z_L(p)) = F(p) - \sum_{i=1}^{I} w^i$$

Nota 7 *La función exceso de demanda caracteriza unívocamente los precios de equilibrio. Es decir, $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ es un equilibrio Walrasiano sí y solo si $Z(p) = 0$.*

Teorema 2 (La ley de Walras 2)

$$p \cdot Z(p) = 0$$

Ésta ecuación es una forma equivalente de la ley de Walras (como la vimos antes).

Nota 8 *Para que nuestros argumentos sean vá lidos necesitamos suponer que cada agente, al escoger óptimamente su canasta de consumo, siempre escoge un punto en la linea presupuestal. Para esto es suficiente suponer monotonicidad.*

Teorema 3 (Existencia del Equilibrio) *Sea* $\mathcal{E} = \left(\mathcal{I}, \left(u^i, \omega^i\right)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ *una economía que satisface las propiedades usuales. Obsérvese que, si la función exceso de damanda es continua, entonces la función de ajuste del subastador Walrasiano* T*, también es continua. Además, si* T *tiene un punto fijo* $p^* \in \Delta_{++}^{n-1}$*, entonces* $Z(p^*) = 0$.

Nota 9 *Arrow demostró que las condiciones para que el equilibrio sea único son extremas (básicamente, que todos los agentes tengan funciones de utilidad Cobb-Douglas).*

Teorema 4 (1er Teo. fundamental del bienestar) *Dada una economía de intercambio con agentes que tienen utilidades debilmente crecientes, si* $\left(p, \left(x^1, x^2, ..., x^I\right)\right)$ *es un equilibrio Walrasiano, entonces* $\left(x^1, x^2, ..., x^I\right)$ *es eficiente en el sentido de Pareto.*

Proof. Supongamos que $\left(p, \left(x^1, x^2, ..., x^I\right)\right)$ es un equilibrio Walrasiano, pero $\left(x^1, x^2, ..., x^I\right)$ no es eficiente en el sentido de Pareto. Entonces, existe $\left(\widehat{x}^1, \widehat{x}^2, ..., \widehat{x}^I\right)$ tal que:

1. $\sum_{i=1}^{I} \widehat{x}^i = \sum_{i=1}^{I} w^i$
2. Para todo i, $u^i\left(\widehat{x}^i\right) \geqslant u^i\left(x^i\right)$
3. Para algún i^*, $u^{i^*}\left(\widehat{x}^{i^*}\right) > u^{i^*}\left(x^{i^*}\right)$

Por definición de equilibrio, se sigue de la condición (3) que $p \cdot \widehat{x}^{i^*} > p \cdot x^{i^*}$, mientras que la condición (2) implica que, para todo i, $p \cdot \widehat{x}^i \geqslant p \cdot x^i$. Sumando para todos los agentes, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot \widehat{x}^i > \sum_{i=1}^{I} p \cdot x^i$$

de donde se deduce que

$$p \cdot \sum_{i=1}^{I} \widehat{x}^i > p \cdot \sum_{i=1}^{I} x^i = p \cdot \sum_{i=1}^{I} w^i$$

lo cual contradice la condición 1. ■

Nota 10 *Aunque todo equilibrio es un optimo de Pareto, no necesariamente todo optimo de Pareto es un equilibrio.*

Teorema 5 (2do Teo. fundamental del bienestar) *Dada una economía constituída por preferencias* $\left(u^1, u^2, ..., u^I\right)$ *— tal que* u^i *es debilemtne creciente y cuasi-concava para todo* i *— y dotaciones* $\left(w^1, w^2, ..., w^I\right)$*, si* $\left(x^1, x^2, ..., x^I\right)$ *es una asignación eficiente entonces existe una redistribución de las dotaciones* $\left(\widehat{w}^1, \widehat{w}^2, ..., \widehat{w}^I\right)$ *y unos precios* $p = (p_1, p_2, ..., p_L)$ *tales que:*

1. $\sum_{i=1}^{I} \widehat{w}^i = \sum_{i=1}^{I} w^i$
2. $\left(p, \left(x^1, x^2, ..., x^I\right)\right)$ *es un equilibrio Walrasiano de la economía constituída por preferencias* $\left(u^1, u^2, ..., u^I\right)$ *y dotaciones* $\left(\widehat{w}^1, \widehat{w}^2, ..., \widehat{w}^I\right)$

Nota 11 *A diferencia del primer teorema del bienestar, en este caso, la forma de las curvas de indiferencia es clave (i.e., cuasi-concavidad).*

Nota 12 *La implicación del teorema es que si una autoridad de política econ ómica desea imponer una asignación eficiente, no necesita cerrar los mercados. Por el contrario, puede limitarse a redistribuir las dotaciones (política fiscal) de manera adecuada y luego permitirle a los mercados actuar, pues éstos deberían llevar a la economía a la asignaci ón deseada.*

Nota 13 *El teorema no dice que distribución de recursos se debe hacer para alcanzar como equilibrio el optimo de Pareto que uno desea.*

4 Economías con producción

Suponga que hay J productores. Que cada productor produce (potencialmente) los L bienes de la economía. Las funciones de producción estan dadas por $f_j^l(z_1^{j,l}, ..., z_L^{j,l})$ donde $z_i^{j,l}$ es cuanto usa del bien $z_i^{j,l}$ la firma j para producir l. Sea $\pi_j = max \sum_{l=1}^{L}[p_l f_j^l(z_1^{j,l}, ..., z_L^{j,l}) - \sum_{l'=1}^{L} p_{l'} z_l^{j,l'}]$ las ganancias de la firma j. Sea $\theta_{i,j}$ la fracción de la firma j de la cual es dueña el agente i. Note que $\sum_{i=1}^{I} \theta_{i,j} = 1$ para todo j.
En este caso tenemos que

Definición 8 (Equilibrio general) *Sea* $\mathcal{E}$ *una economía con producción. Un equilibrio (general) con competencia perfecta para la economía con producción* $\mathcal{E}$ *es* $(p^*, x^*, z^*) \in \mathbb{R}_{++}^{L} \times \mathbb{R}_{+}^{IL} \times \mathbb{R}_{+}^{IL} \times \mathbb{R}_{+}^{JIL}$ *compuesto por un vector de precios* p^* *y una asignación de recursos* x^**, y unos insumos de producción* z^* *tal que:*

1. *Cada agente maximice su utilidad a los precios dados. Para todo* $i \in \mathcal{I}$

$$x^{*i} = \underset{x^i : p^* \cdot x^i \leq p^* \cdot w^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{i,j}}{arg\,max} u^i(x)$$

2. *Cada firma maximiza sus ganancias. Para todo* j

$$z^{j^*} = \underset{z^j}{arg\,max} \sum_{l=1}^{L}[p_l f_j^l(z_1^{j,l}, ..., z_L^{j,l}) - \sum_{l'=1}^{L} p_{l'} z_l^{j,l'}]$$

3. *Todos los mercados se ajusten (i.e., se equilibran).*

Para todo l:

$$\sum_{i=1}^{I} x_l^i + \sum_{j=1}^{J}\sum_{l'=1}^{L} z_l^{j,l'} = \sum_{i=1}^{I} w_l^i + \sum_{j=1}^{J} f_j^l$$

Nota 14 *El 1er y 2do teorema del bienestar siguen aplicando.*

5 Monopolio

Supongamos que hay una única firma que vende una cantidad de producto q a un precio p. Puesto que ésta es la única firma en el mercado, ésta escoge el precio como una función de la cantidad q, $p(q)$. El problema de la firma es:

$$\max_q p(q)q - c(q)$$

donde $c(q)$ es la función de costos condicionales y, por simplicidad, hemos omitido el precio de los factores. Las condiciones de primer orden son:

$$p(q)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon(q)}\right) = c'(q)$$

donde el lado izquierdo es el ingreso marginal, el derecho el costo marginal y $\varepsilon(q) = (dq/dp)(p/q)$ es la elasticidad de la demanda con respecto al precio.[1] Puesto que el costo marginal es siempre positivo entonces el problema tiene solución só lo cuando en el óptimo $|\varepsilon(q)| \geq 1$. En conclusión, una firma monopolista produce en la región donde la demanda es elastica.
Un poco de álgebra nos permite escribir la condición de primer orden como:

$$\frac{p(q) - c'(q)}{p(q)} = -\frac{1}{\varepsilon(q)}$$

lo cual implica que el precio está por encima del costo marginal en una cantidad proporcional al inverso de la elasticidad de la demanda. Entre más inelastica sea la demanda (pero mayor que 1 en valor absoluto) mayor es la diferencia entre el precio y el costo marginal.

6 Discriminación de precios

Definición 9 (Discriminación de primer grado) *Cuando existe este tipo de discriminación cada una de las unidades se vende al individuo en su disponibilidad a pagar por dicha unidad.*

Nota 15 *En este caso no hay perdida de eficiencia. El monopolista se queda con todo el excedente generado por el intercambio de bienes*

[1]Suponemos que la demanda es decreciente en el precio.

Nota 16 *Cuando se presenta una discriminación perfecta de precios, la curva de demanda del mercado se convierte en la curva de ingreso marginal de la empresa. Cuando el precio se reduce para vender una cantidad más grande, la empresa vende solo la unidad marginal al precio menor*

Definición 10 (Discriminación de segundo grado) *Ocurre cuando el monopolista sabe cómo están distribuidas las propensiones a pagar entre los distintos consumidores, es decir, sabe que precios puede cobrar dependiendo de cada tipo de consumidor, pero en el momento en que uno de ellos se acerca a comprar, no sabe a qué tipo pertenece.*

Nota 17 *Esto incluye discriminación por calidad (se ofrecen diferentes calidades a diferentes precios) o por volumnes (se ofrecen diferentes volúmenes a diferentes precios)*

Nota 18 *La tarifa de dos partes es un caso especial de discriminación de segundo grado. En general, el monopolista termina cobrándoles el costo marginal a los individuos por cada unidad consumida, y les cobra una tarifa de entrada igual al excedente del consumidor. Por ende no hay pérdida de eficiencia..*

Definición 11 (Discriminación de tercer grado) *Ocurre cuando el mercado esta segmentado. En este caso la firma actua como un monopolista en cada mercado.*

Nota 19 *Debe ser imposible re-vender de un mercado a otro. De otra manera en equilibrio el precio en ambos mercados seria el mismo (por arbitraje).*

7 Teoría de Juegos

Definición 12 (Estrategia) *Una estrategia es un plan completo de acción. Es decir, una estrategia es una acción para cada posible contingencia del juego que el jugador pueda enfrentar.*

La representación normal consiste de

- Lista de los jugadores.
- Espacio de estrategias.
- Funciones de pago.

Para representar un juego en forma extensiva se necesita:

- Lista de los jugadores.
- Información disponible a cada jugador en cada momento del juego.

- Acciones disponibles a cada jugador en cada momento del juego.
- Funciones de pago.

Definición 1 (Dominación I) *s_i **domina** a s_i' si $u(s_i, s_{-i}) > u(s_i', s_{-i})$ $\forall s_{-i} \in S_{-i}$. Es decir si jugar s_i siempre es **estrictamente** mejor.*

Definición 2 (Dominación II) *s_i **es estrictamente dominanante** si **domina** a toda las demas estrategias del jugador i.*

Definición 3 (Soluble por medio de dominación) *Se dice que un juego es soluble por medio de **eliminación iterativa de estrategias dominadas** si el resultado de la iteración es un único perfil de estrategias (una para cada jugador).*

Nota 20 *El orden de eliminación de las estrategias estrictamente dominadas no es importante.*

Definición 4 (dominación débil) *s_i **domina debilemente** a s_i' si $u(s_i, s_{-i}) \geq u(s_i', s_{-i})$ $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ y existe al menos una estrategia s_{-i}' tal que $u(s_i, s_{-i}') > u(s_i', s_{-i}')$. Es decir si jugar s_i siempre es mejor y en algún caso es estrictamente mejor.*

Nota 21 *Dados los supuestos que tenemos no podemos eliminar una estrategia débilmente dominada. Racionalidad **no** es suficiente. Aun así, suena "lógico" hacerlo y tiene el potencial de simplificar un juego enormemente. Sin embargo, hay un problema, y es que el orden en que eliminemos las estrategias importa.*

Definición 5 (Mejor Respuesta) *Denotamos por $MR_i(s_{-i})$ (Mejor respuesta) como el conjunto de estrategias del individuo i que maximizan su utilidad dado que los demás individuos siguen el perfil de estrategias s_{-i}. En términos formales.*

$$MR_i(s_{-i}) = \{s_i | u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i' =, s_{-i}) \forall s_i' \in S_i\}$$

Definición 6 (Equilibrio de Nash) *s^* es un equilibrio de Nash si todo los individuos están jugando su mejor respuesta a la estrategia de los demás. Es decir si*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \forall s_i \in S_i$$

para todo i

Teorema 6 *Todo equilibrio de Nash sobrevive a la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.*

Proof. Suponga que no es así. Entonces eliminamos s^* un equilibrio de Nash. Miremos la ronda en la que se elimina una estrategia que hace parte del equilibrio de Nash y que es la estrategia del individuo i (sin pérdida de generalidad). Esto quiere decir que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i}) \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

. En particular tenemos que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}*) < u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Esto quiere decir que s_i^* no es una mejor respuesta para el individuo i dado s_{-i}^*, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 7 *Si el proceso de eliminación de estrategias estrictamente dominadas llega a una solución única, esa solución es un Equilibrio de Nash y es único.*

Proof. Primero probemos que es un equilibrio de Nash. Una vez probemos esto, que sea único es trivial por el teorema anterior. Suponga que el resultado de la eliminación de estrategias estrictamente dominadas, denotado por s^* no es un equilibrio de Nash. Esto quiere decir que para algún individuo, i, existe s_i tal que

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$$

Pero entonces s_i no se podría haber eliminado, lo cual da una contradicción. ■

Definición 7 *Si $S_i = \{s_i^1, ..., s_i^k\}$. Decimos que $\sigma_i = (p_1, p_2, ..., p_k)$ es una estrategia mixta que asigna probabilidad p_j a la estrategia s_i^j siempre y cuando $\sum p_j = 1$ y $p_j > 0$.*

Definición 8 (Equilibrio de Nash en estrategias mixtas) *σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas si*

$$\mathbb{E}u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mathbb{E}u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \forall \sigma_i \in \Delta S_i$$

para todo i

Adicionalmente, podemos extender el concepto de dominación a estrategias mixtas.

Definición 9 (dominación en estrategias mixtas) *σ_i **domina** a s_i' si $\mathbb{E}u(\sigma_i, s_{-i}) > \mathbb{E}u(s_i', s_{-i})$ $\forall s_{-i} \in S_{-i}$. Es decir si jugar σ_i siempre es **estrictamente** mejor.*

Nota 22 *Esta es el concepto final de dominación que utilizaremos. Los resultados que relacionan Equilibrios de Nash con dominación en estrategias puras, se extienden a una relación entre equilibrios de Nash en estrategias mixtas y dominación en estrategias mixtas.*

Teorema 8 (Teorema de Nash) *Todo juego con un número finito de jugadores y acciones disponibles para cada jugador tiene al menos un equilibrio de Nash, posiblemente en estrategias mixtas.*

Definición 10 (Juegos dinámicos) *Los juegos dinámicos se caracterizan por que los jugadores mueven de forma secuencial, y al menos uno de ellos observa, en al menos un caso, que hizo otro jugador antes de mover.*

Nota 23 *Una manera natural de asegurar esta optimalidad, es moverse nodo por nodo desde el final del juego hasta el principio, y encontrar la acción optima en cada nodo. A medida que se va hacia "atrás" (hacia el principio del juego) se optimiza teniendo en cuenta las movidas óptimas en nodos que se encuentran mas adelante en el juego. Este procedimiento se conoce como **inducción hacia atrás**.*

Teorema 9 (Zermelo) *Todo juego finito donde todos los conjuntos de información contienen un solo nodo tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras que se puede derivar por medio de inducción hacia atrás. Si ningún jugador recibe el mismo pago en dos nodos terminales diferentes, entonces el equilibrio de Nash es único.*

Definición 11 (Subjuego) *Un subjuego, de un juego en forma extensiva, es un subarbol tal que:*

- *Empieza en un único nodo de decisión.*
- *Contiene todos los nodos que siguen a su nodo inicial.*
- *Si contiene cualquier punto de un conjunto de información, entonces contiene todo el conjunto de información.*

El juego original es un subjuego en sí.

Definición 12 (Equilibrio Perfecto en Subjuegos) *Un equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) es un perfil de estrategias tal que es un equilibrio de Nash en todos los subjuegos.*

Nota 24 *Todo equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) es necesariamente un Equilibrio de Nash (EN). No todo EN es necesariamente un EPS.*

Definición 13 (Juegos repetidos) *Un juego puede repetirse varias veces, incluso al infinito. Al repetirse se convierte en un juego dinámico. Se usará la siguiente notación: si G denota el juego, entonces (G, T) denota el juego repetido T veces. Con frecuencia se utiliza un descuento intertemporal para valorar las utilidades de distintos peródos. La utilidad del jugador i en el juego repetido T veces está dada por:* $\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_{it}$*, donde* δ *denota la tasa de descuento intertemporal y* u_{it} *es la utilidad del jugador i en el periodo t. Si* $T = \infty$ *, el juego se repite al infinito.*

Teorema 10 *En* $t = T$ *cada subjuego es igual al juego base, por cuanto los únicos premios y castigos que pueden ser Equilibrios de Nash de estos subjuegos son los Equilibrios de Nash del juego Base. Es decir, en el ultimo periodo siempre se debe jugar un Equilibrio de Nash del juego base.*

Teorema 11 *Si el juego estático (G) tiene exactamente un Equilibrio de Nash* $= (S_1^*, S_2^*, ..., S_N^*)$ *entonces el juego repetido (G,T) tiene exactamente un Equilibrio Perfecto de Subjuegos, en el que en cada uno de T periodos el jugador (i) escoge la estrategia* S_i^**, independientemente de lo que se haya jugado anteriormente.*

Teorema 12 *Denote por* $(e_1^*, e_2^*, ..., e_N^*)$ *los pagos de un Equilibrio de Nash del juego estático G, y denote* $(X_1, X_2, ..., X_N)$ *otro conjunto de pagos cualquiera del juego G, que sea posible dado los espacios de estrategias (incluyendo estrategias mixtas). Si* $X_i > e_i^*$ *para todo jugador i y* δ *es suficientemente cercano a 1, entonces hay un Equilibrio Perfecto de Subjuegos del juego* (G, ∞) *en el cual los pagos están dados por* $(X_1, X_2, ..., X_N)$ *en cada periodo.*