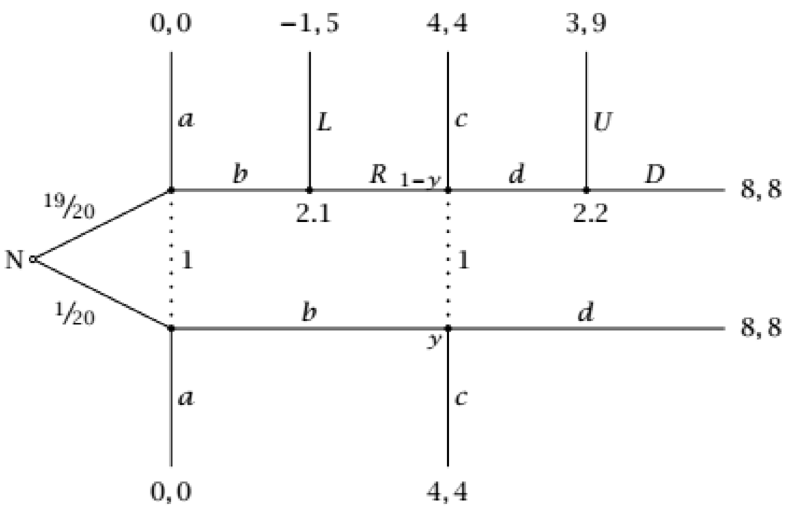
Microeconomía II
Prof. Mauricio Romero
Parcial 2 - 9 de Julio de 2018

Nota 1: Está prohibido el uso de calculadora y de celular.
Nota 2: La nota del examen será el número total de puntos que consigna multiplicado por 5/6. (i.e. $5\frac{Puntos}{6}$)

1. Considere el juego de Yildiz de la siguiente figura: Los jugadores toman turnos para ser generosos o egoístas. Cada jugador pierde \$1 al ser generoso, pero gana \$5 cada vez que el otro jugador es generoso. (a, L, c, U son acciones egoístas, pero b, R, d, D son acciones generosas). El jugador 1 no está seguro si el jugador 2 puede ser egoísta. Hay una probabilidad de 19/20 de que el jugador 2 sea egoísta y una (pequeña) probabilidad de 1/20 de que sea generoso (jugador generoso siempre continua el juego). El jugador 2 sabe su propio tipo. Encuentre los EBP en estrategias puras de este juego. **Bono por 0.5 ptos: Encuentre los EPS en estrategias mixtas.**



Solución:

Voy a hacer solo las estrategias puras. En el nodo marcado como 2.2 el jugador dos elije U. En el conjunto de información anterior a eso:

$$\mathbb{E}(U_1(c)) = 4$$

$$\mathbb{E}(U_1(d)) = 3(1-\gamma) + 8\gamma$$

Entonces elije c si $4 > 3(1-\gamma) + 8\gamma$ o en otras palabras si $\frac{1}{5} > \gamma$.

Ahora veamos que puede ser un EBP. Si $\frac{1}{5} > \gamma$, entonces el jugador 1 elije c. Por ende 2.1 elegiría L, y por ende en el primer conjunto de información el jugador 1 elige a pues $\mathbb{E}(U_1(a)) = 0$ y $\mathbb{E}(U_1(b)) = -1\frac{19}{20} + \frac{1}{20}4 = -\frac{15}{20}$.

Por actualización bayesiana $\gamma = \frac{\frac{1}{20}*0}{\frac{1}{20}*0+\frac{19}{20}*0*0}$ entonces si indeterminado, y podemos elegir el número que queramos. Así que $\{ac, LU\}$ es un EBP.

Si $\frac{1}{5} < \gamma$, entonces el jugador 1 elije d. Por ende 2.1 elegiría R, y por ende en el primer conjunto de información el jugador 1 elige b pues $\mathbb{E}(U_1(a)) = 0$ y $\mathbb{E}(U_1(b)) = 3\frac{19}{20} + \frac{1}{20}8 =$.

Por actualización bayesiana $\gamma = \frac{\frac{1}{20}*1}{\frac{1}{20}*1+\frac{19}{20}*1*1} = \frac{1}{20} < \frac{1}{5}$ entonces también es un EBP. En resumen $\{bd, RU\}$ es un EBP también.

2. **1 punto** Suponga que un coleccionista de arte está vendiendo una pintura, que puede ser "original" o "pirata". Una pintura original vale 1 para el coleccionista. Una pintura pirata vale 0 para el coleccionista. El coleccionista sabe si la pintura es original o pirata. Un comprador no lo sabe, solo sabe que con probabilidad 0.5 la pintura es "original" y con probabilidad 0.5 es pirata. Una pintura original vale v para el comprador, mientras que una pintura pirata vale cero. El comprador hace una oferta, y el vendedor acepta o rechaza (suponga que en caso de que sea indiference el vendedor acepta).

(a) **0.25 puntos** Suponga que $v = 1$, ¿Cuál es la oferta que hace el comprador?
Solución: Leer la solución al quiz 3.

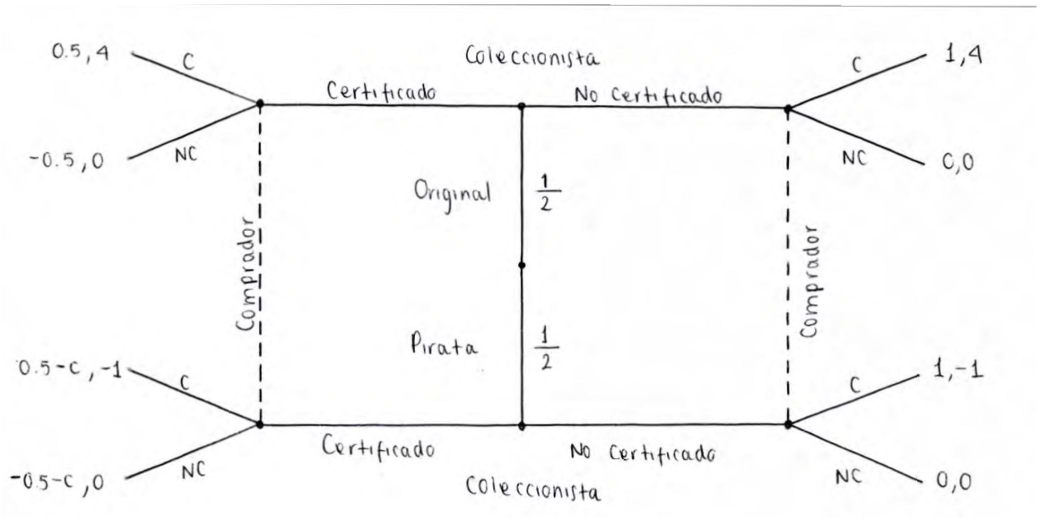
(b) **0.25 puntos** Suponga que $v = 2$, ¿Cuál es la oferta que hace el comprador?
Solución: Leer la solución al quiz 3.

(c) **0.25 puntos** Suponga que $v = 5$, ¿Cuál es la oferta que hace el comprador?
Solución: Leer la solución al quiz 3.

(d) **0.25 puntos** Discuta la eficiencia del resultado en las partes a,b, y c. ¿Hay alguna ineficiencia? ¿Cuál es la fuente de dicha ineficiencia?
Solución: Leer la solución al quiz 3.

3. **1 punto** Siguiendo con el punto anterior (con $v = 5$): Ahora suponga que el dueño de la pintura puede adquirir un certificado de que la pintura es original. Este certificado tiene un costo de 0.5 si la pintura es original. Si la pintura es pirata cuesta $0.5 + c$ donde c es el costo de sobornar al certificador para que emita un certificado falso. Suponga que la secuencia es la siguiente. El dueño de la pintura decide certificarla o no. Después el comprador decide si comprarla o no a un precio de 1. Dado que la pintura original vale 1, el vendedor de la pintura original no gana nada monetariamente si vende la pintura, pero suponga que gana una unidad por la satisfaccion de ver la pintura pasar a buenas manos si tiene una pintura original. Si no hay trato (no se vende la pintura) ambos ganan cero (menos el costo de certificarse, en caso dado).

(a) **0.2 punto** Dibuje este juego en forma extensiva usando un arbol



(b) **0.6 puntos** Encuentre los EBP (en estrategias puras) de este juego.
Hay dos equilibrios que no dependen de c.

$$\{NC^{original}NC^{pirata}, C^{c}C^{nc}, p = 1, q = \frac{1}{2}\{$$

$$\{NC^{original}NC^{pirata}, NC^{c}C^{nc}, p = 1, q = \frac{1}{2}\{$$

Hay dos equilibrios que dependen de c.

$$\{C^{original}C^{pirata}, C^{c}NC^{nc}, p = 1, q = \frac{1}{2}\{ \text{ si } c < 0.5$$

$$\{C^{original}NC^{pirata}, C^{c}NC^{nc}, p = 1, q = \frac{1}{2}\{ \text{ si } c > 0.5$$

(c) **0.1 puntos** ¿Para qué valores de c el juego tiene un equilibrio separador donde solo la gente con pintura original se certifica? De una intuición sobre este resultado.
para $c < 0.5$

(d) **0.1 puntos** ¿Para qué valores de c el juego tiene un equilibrio agrupador donde todo el mundo se certifica? De una intuición sobre este resultado. para $c < 0.5$

4. **1 punto** Considere una subasta de segundo precio.

(a) **0.4 puntos** Demuestre que en una subasta de segundo precio ofertar mi valoración domina débilmente a todas las demás reglas de decisión sin importar cuantos jugadores existan ni cuál es la distribución de la valoración de los jugadores.
Solución:
Esto está en las notas de clase. Sea $\hat{b}$ la puja más alta de los contrincantes. Si $v_i > \hat{b}$ con la puja v_i se gana la subasta. Pujando algo más alto no se cambian los pagos ni la probabilidad de ganar. Pujando algo más bajo, si se cae por debajo de $\hat{b}$ se pierde la subasta.
Si $v_i < \hat{b}$ entonces se está perdiendo la subasta con v_i y se gana cero, pero si se puja algo más alto y se gana entonces se paga $\hat{b}$ y se obtiene una utilidad negativa.
Por ende pujar v_i domina débilmente a todas las demás reglas de decisión.

(b) **0.3 puntos** Encuentre un equilibrio de Bayes-Nash de este juego. Justifique.
Solución:

$$E.B.N. = (b(v_1) = v_1, ..., b(v_n) = v_n)$$

Dado que pujar la valoración domina débilmente a todo lo demás, sin importar lo que hagan los demás yo no tengo ningún incentivo unilateral a desviarme.

(c) **0.3 puntos** Comente la importancia de este resultado.
Solución:
Dado que la subasta de primer precio y la de segundo son equivalentes en términos de utilidad esperada para los participantes y de ganancias para el subastador, entonces la subasta de segundo precio es mejor pues le permite a uno extraer información. Adicionalmente, este resultado no depende de la distribución de las valoraciones ni de la cantidad de participantes.

5. **1 punto** Considere una subasta cerrada de primer precio entre dos jugadores. Cada jugador observa una señal (de manera privada) t_i de cuánto vale el bien, y su valoración del bien es igual a $0.5 + t_i$. El individuo i no sabe que señal recibió el otro individuo, pero sabe que $t_i \sim U[0, 1]$.

(a) **0.6 puntos** Encuentre el equilibrio Bayes-Nash de este juego (puede suponer que la gente sigue una regla de decisión lineal en equilibrio, es decir que $b(v_i) = \alpha + \beta v_i$.
Solución:
La utilidad esperada es

$$\mathbb{E}U = (v_i - a_i)P(a_i > b(t_{-i}))$$
$$\mathbb{E}U = (t_i + 0.5 - a_i)P(a_i > b(t_{-i}))$$
$$\mathbb{E}U = (t_i + 0.5 - a_i)P(a_i > \alpha + \beta t_{-i})$$
$$\mathbb{E}U = (t_i + 0.5 - a_i)P\left(\frac{a_i - \alpha}{\beta} > t_{-i}\right)$$
$$\mathbb{E}U = (t_i + 0.5 - a_i)\left(\frac{a_i - \alpha}{\beta}\right)$$

Derivamos con respecto a a_i y obtenemos:

$$-\left(\frac{a_i - \alpha}{\beta}\right) + (t_i + 0.5 - a_i)(\frac{1}{\beta}) = 0$$
$$-(a_i - \alpha) + (t_i + 0.5 - a_i) = 0$$
$$\frac{\alpha + t_i + 0.5}{2} = a_i = \alpha + \beta t_i$$

Por ende $\frac{\alpha+0.5}{2} = \alpha$ entonces $\alpha = \frac{1}{2}$. De manera similar $\beta = \frac{1}{2}$
Entonces

$$b(t_i) = \frac{1 + t_i}{2}$$

(b) **0.2 puntos** ¿Cuál es el pago esperado para cada jugador y para el subastador en este juego?
Solución:
Para los jugadores el pago esperado es:

$$\mathbb{E}U = (t_i + 0.5 - \frac{1+t_i}{2})\left(\frac{\frac{1+t_i}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{t_i^2}{2}$$

Para el subastador el pago esperado es el maximo de las dos pujas.
$\mathbb{E}U_{subastador} = \mathbb{E}\max(\frac{1+t_1}{2}, \frac{1+t_2}{2}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\max(t_1, t_2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 z f_{\max(t_1,t_2)}(z)dz + \frac{1}{2}$
Y es facil demostrar que $f_{\max(t_1,t_2)} = 2a$ entonces

$$\mathbb{E}U_{subastador} = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

6. **1 punto** Ahora considere una subasta cerrada de primer precio entre dos jugadores, pero donde el valor final del bien depende de la señal que reciben los dos. Es decir el valor final es $t_1 + t_2$. Cada jugador sabe cuál es su señal del bien, pero no la del otro individuo. Sin embargo, sabe que $t_{-i} \sim U[0,1]$. Note que esto quiere decir que su valoración esperada es $t_i + 0.5$ (es decir la misma que en el punto anterior, dado que $\mathbb{E}t_{-i} = 0.5$).

   (a) **0.6 puntos** Encuentre el equilibrio Bayes-Nash de este juego (puede suponer que la gente sigue una regla de decision lineal en equilibrio, es decir que $b(v_i) = \alpha + \beta v_i$.
   Solución:

$$\mathbb{E}U = \mathbb{E}\left(t_i + t_{-i} - a_i | a_i > b(t_{-i})\right)$$
$$\mathbb{E}U = \mathbb{E}\left(t_i + t_{-i} - a_i | a_i > \alpha + \beta t_i)\right)$$
$$\mathbb{E}U = \mathbb{E}\left(t_i + t_{-i} - a_i | \frac{a_i - \alpha}{\beta} > t_i)\right)$$
$$\mathbb{E}U = \int_0^{\frac{a_i-\alpha}{\beta}} (t_i + t_{-i} - a_i) f_{t_{-i}}(t_{-i}) dt_{-i}$$
$$\mathbb{E}U = t_i t_{-i} + \frac{t_{-i}^2}{2} - a_i t_{-i}\Big|_0^{\frac{a_i-\alpha}{\beta}}$$
$$\mathbb{E}U = t_i\left(\frac{a_i - \alpha}{\beta}\right) + \frac{\left(\frac{a_i-\alpha}{\beta}\right)^2}{2} - a_i\left(\frac{a_i - \alpha}{\beta}\right)$$

Derivamos con respecto a a_i y obtenemos:

$$t_i\left(\frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{a_i - \alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\beta} - \left(\frac{a_i - \alpha}{\beta}\right) - a_i\frac{1}{\beta} = 0$$
$$t_i + \left(\frac{a_i - \alpha}{\beta}\right) - (a_i - \alpha) - a_i = 0$$
$$t_i + \frac{-\alpha}{\beta} + \alpha = a_i\left(2 - \frac{1}{\beta}\right)$$
$$\frac{t_i + \frac{-\alpha}{\beta} + \alpha}{\left(2 - \frac{1}{\beta}\right)} = a_i = \alpha + \beta t_i$$

Por ende

$$\beta = \frac{1}{2 - \frac{1}{\beta}}$$
$$\alpha = \frac{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}}{2 - \frac{1}{\beta}}$$

entonces

$$\beta = 1$$
$$\alpha = 0$$

(b) **0.4 puntos** ¿Cuál es el pago esperado para cada jugador y para el subastador en este juego?
Solución:
Para los jugadores es

$$\mathbb{E}U = t_i\left(\frac{a_i-\alpha}{\beta}\right) + \frac{\left(\frac{a_i-\alpha}{\beta}\right)^2}{2} - a_i\left(\frac{a_i-\alpha}{\beta}\right)$$
$$\mathbb{E}U = t_i a_i + \frac{a_i^2}{2} - a_i^2$$
$$\mathbb{E}U = t_i^2 + \frac{t_i^2}{2} - t_i^2$$
$$\mathbb{E}U = \frac{t_i^2}{2}$$

Para el subastador el pago esperado es el maximo de las dos pujas.

$$\mathbb{E}U_{subastador} = \mathbb{E}\max(t_1,t_2) = \int_0^1 z f_{\max(t_1,t_2)}(z)dz = \frac{2}{3}$$

(c) **0.4 puntos** Compare los equilibrios del numeral anterior con los de este numeral (es decir la subasta cerrada de primer precio con valoración privada, con la subasta cerrada de primer precio con valoración común)
...

7. **Bono** Considere una subasta de herencia. Es decir, dos hermanos heredan una fábrica de su padre. Para decidir quién se queda con la fábrica ellos hacen una subasta de primer precio entre ellos, donde la puja más alta gana, paga su puja y se queda con la fábrica. La diferencia con una subasta normal de primer precio, es que el perdedor se queda con la puja del ganador. Es decir si i gana con b_i entonces él se queda con $v_i - b_i$ y el perdedor se queda con b_i. Suponga que cada individuo conoce su valoración pero no la de su hermano, y solo sabe que $v_{-i} \sim U[0,1]$.

(a) **0.5 puntos** Encuentre un equilibrio Bayes-Nash de este juego. Si quiere puede suponer que en equilibrio $b(v) = kv$.
Solución:
La utilidad esperada acá es

$$\mathbb{E}U = (v_i - b_i)P(b_i > b(v_{-i})) + \int_{b^{-1}(b_i)}^1 b(v_{-i})dv_{-i}$$
$$\mathbb{E}U = (v_i - b_i)P(\frac{b_i}{k} > v_{-i}) + \int_{\frac{b_i}{k}}^1 b(v_{-i})dv_{-i}$$
$$\mathbb{E}U = (v_i - b_i)\frac{b_i}{k} + \int_{\frac{b_i}{k}}^1 kv_{-i}dv_{-i}$$

Diferenciando con respecto a b_i tenemos:

$$\frac{v_i}{k} - 2\frac{b_i}{k} - k\frac{b_i}{k}\frac{1}{k} = 0$$
$$\frac{v_i}{k} - 2\frac{b_i}{k} - \frac{b_i}{k} = 0$$
$$v_i = 3b_i$$

En equilibrio $b_i = kv_i$ entonces:

$$v_i = 3kv_i$$
$$k = \frac{1}{3}$$

(b) **0.25 puntos** Calcule la utilidad esperada en equilibrio y compare la con la subasta de primer precio.

Solución:

$$\mathbb{E}U = (2\frac{v_i}{3})v_i + \int_{v_i}^{1} 3v_{-i}dv_{-i}$$

$$\mathbb{E}U = (2\frac{v_i^2}{3}) + \frac{3}{2}v_{-i}^2|_{v_i}^1$$

$$\mathbb{E}U = \frac{2v_i^2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}v_i^2$$

$$\mathbb{E}U = \frac{3}{2} - \frac{5}{6}v_i^2$$

Es diferente a la subasta de primer precio normal.

(c) **0.25 puntos** Demuestre que si en vez de una subasta de primer precio, se hiciera una subasta de segundo precio, entonces pujar la valoración **no** es un equilibrio.

Solución:

Este se los dejo como ejercicio.