# Quiz 3 Solución.

1. a) $v=1$

El valor esperado de la utilidad del comprador es

$$\mathbb{E}U(v,a) = (v-a)\frac{1}{2} + (-a)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a$$

$$= \frac{1}{2}v - a$$

Como $v=1$ $\quad = \frac{1}{2} - a$

Para que el valor esperado de la utilidad no sea negativo se debe cumplir que

$$\frac{1}{2} - a \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \geq a$$

Esto significa que la oferta máxima del comprador sería $\frac{1}{2}$.

Desde el punto de vista del coleccionista

$$MR^{\text{Original}}_{\text{Coleccionista}} \begin{cases} A & \text{si} \quad a \geq 1 \\ R & \text{si} \quad a < 1 \end{cases}$$

$$MR^{\text{Pirata}}_{\text{coleccionista}} \{ A \quad \text{si} \quad a \geq 0$$

Como el coleccionista con la pintura original sólo aceptaría $a \geq 1$ pero la maxima oferta del comprador sería $\frac{1}{2}$, entonces el comprador va a ofrecer $a=0$

b) $v=2$

$$\mathbb{E}U(v,a) = \frac{1}{2}v - a = 1 - a$$

Para que $\mathbb{E}U(v,a) \geq 0 \longrightarrow 1 - a \geq 0$

$$1 \geq a$$

Por lo tanto, el comprador va a ofrecer $a=1$ ó $a=0$.

c) $v=5$

$$\mathbb{E}U(v,a) = \frac{1}{2}v - a = \frac{5}{2} - a$$

Para que $\mathbb{E}U(v,a) \geq 0 \longrightarrow \frac{5}{2} \geq a$

Por lo tanto, el comprador va a ofrecer $a=1$

d) Hay información asimétrica, por lo que los resultados se desviarán de lo óptimo social.

(2) $I \in \{1,2\}$

$a_1 \in \{T, M, B\}$

$a_2 \in \{L, R\}$

$P(1, 2.a) = \frac{1}{4}$ ; $P(1, 2.b) = \frac{3}{4}$

a) El Jugador 1 tiene 1 tipo
El Jugador 2 tiene 2 tipos $\quad \theta = \{a, b\}$

b) $S_1 = \{T, M, B\}$
$S_2 = \{(L^a, L^b); (L^a, R^b); (R^a, L^b); (R^a, R^b)\}$

c)

| 1\2a | L | R |
|---|---|---|
| T | 4,2 | 0,1 |
| M | 3,0 | 1,1 |
| B | 2,4 | 3,3 |

| 1\2.b | L | R |
|---|---|---|
| T | 0,1 | 0,2 |
| M | 1,1 | 9,1 |
| B | 3,2 | 4,1 |

$$mR_2^a = \begin{cases} L & s_1 \quad S_1 = T \\ R & s_1 \quad S_1 = M \\ L & s_1 \quad S_1 = B \end{cases} \qquad mR_2^b = \begin{cases} R & s_1 \quad S_1 = T \\ L, R & s_1 \quad S_1 = M \\ L & s_1 \quad S_1 = B \end{cases}$$

Construimos una matriz de pagos esperados para el jugador 1

| | $L^a, L^b$ | $L^a, R^b$ | $R^a, L^b$ | $R^a, R^b$ |
|---|---|---|---|---|
| T | $\frac{1}{4}(4) + \frac{3}{4}(0) = 1$ | $\frac{1}{4}(4) + \frac{3}{4}(0) = 1$ | $\frac{1}{4}(0) + \frac{3}{4}(0) = 0$ | $\frac{1}{4}(0) + \frac{3}{4}(0) = 0$ |
| M | $\frac{1}{4}(3) + \frac{3}{4}(1) = \frac{3}{2}$ | $\frac{1}{4}(3) + \frac{3}{4}(9) = \frac{15}{2}$ | $\frac{1}{4}(1) + \frac{3}{4}(1) = 1$ | $\frac{1}{4}(1) + \frac{3}{4}(9) = 7$ |
| B | $\frac{1}{4}(2) + \frac{3}{4}(3) = \frac{11}{4}$ | $\frac{1}{4}(2) + \frac{3}{4}(4) = \frac{7}{2}$ | $\frac{1}{4}(3) + \frac{3}{4}(3) = 3$ | $\frac{1}{4}(3) + \frac{3}{4}(4) = \frac{15}{4}$ |

$$
MR_1 = \begin{cases} B & S_1 & S_2 = (L^a, L^b) \\ M & S_1 & S_2 = (L^a, R^b) \\ B & S_1 & S_2 = (R^a, L^b) \\ M & S_1 & S_2 = (R^a, R^b) \end{cases}
$$

$$EBN = \{(M, R^a R^b) ; (B, L^a L^b)\}$$

(3) a)

El valor esperado de la utilidad del individuo $i$ es

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}U(v,a) &= (v-a)\, P(a > b(v_{-i})) \\
&= (v-a)\, P(b^{-1}(a) > v_{-i}) \\
&= (v-a)\, P(v_{-i} < b^{-1}(a)) \\
&= (v-a)\, b^{-1}(a)
\end{aligned}
\qquad \text{Como} \quad v_i \sim U[0,1]
$$

Maximizando individualmente, diferenciamos con respecto a $\underline{a}$

$$\frac{\partial \mathbb{E}U(v,a)}{\partial a} : \frac{1}{b'(b^{-1}(a))}(v_i - a) - b^{-1}(a) = 0$$

$$(v_i - a) - (b^{-1}(a))(b'(b^{-1}(a))) = 0$$

reemplazando $a = b(v_i)$

$$(v_i - b(v_i)) - (b^{-1}(b(v_i))\,(b'(b^{-1}(b(v_i))))) = 0$$

$$v_i - b(v_i) = v_i\, b'(v_i)$$

$$v_i = b(v_i) + v_i\, b'(v_i)$$

$$\frac{v_i\, b'(v_i)}{v_i} + \frac{b(v_i)}{v_i} = \frac{v_i}{v_i}$$

$$b'(v_i) + \frac{1}{v_i} b(v_i) = 1 \longrightarrow \text{EDL}$$

$$b(v_i) = \frac{\int e^{\int \frac{1}{v_i} dv_i}\, dv_i + C}{e^{\int \frac{1}{v_i} dv_i}} \longrightarrow b(v_i) = \frac{v_i^2}{2 v_i} = \frac{1}{2} v_i$$

b)

$$\mathbb{E}U(v,a) = (v-a)\,P(a > b(v_{-i}))$$ como $b(v_{-i}) = v_{-i}$

$$= (v-a)\,P(a > v_{-i})$$

$$= (v-a)\,P(v_{-i} < a)$$ como $v_{-i} \sim U[0,1]$

$$= (v-a)\,a$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}U(v,a)}{\partial a} : v - 2a = 0$$

reemplazando $a = b(v_i)$

$$v = 2b(v_i)$$

$$b(v_i) = \frac{1}{2}v$$

c) $$\mathbb{E}U(v_1,a_1) = (v_1 - a_1)\,P(a_1 > a_2 \wedge a_1 > a_3)$$

$$= (v_1 - a_1)\,P(a_1 > a_2)\,P(a_1 > a_3)$$ Como son iid.

$$= (v_1 - a_1)\,P\left(a_1 > \frac{2V_2}{3}\right)P\left(a_1 > \frac{2V_3}{3}\right)$$

$$= (v_1 - a_1)\,P\left(\frac{3}{2}a_1 > v_2\right)P\left(\frac{3}{2}a_1 > V_3\right)$$

$$= (v_1 - a_1)\,P\left(v_2 < \frac{3}{2}a_1\right)P\left(v_3 < \frac{3}{2}a_1\right)$$

$$= (v_1 - a_1)\left(\frac{3}{2}a_1\right)^2 = (v_1 - a_1)\left(\frac{9}{4}a_1^2\right)$$ Como $v_i \sim U[0,1]$

$$\frac{\partial \mathbb{E}U(v_1,a_1)}{\partial a_1} : \frac{18}{4}v_1 a_1 - \frac{27}{4}a_1^2 = 0$$

$$18 v_1 a_1 - 27 a_1^2 = 0$$

$$27 a_1^2 = 18 v_1 a_1$$

$$a_1 = \frac{18}{27}v_1$$

$$a_1 = \frac{2}{3}v_1 \longrightarrow b(v_i) = \frac{2}{3}v_i$$