Universidad de Los Andes
Microeconomía III
Taller 6

Miguel Espinosa, Juliana Marquez y Mauricio Romero

Marzo 24 de 2011

1. Considere una economía de intercambio con dos agentes Alicia y Beto. En esta economía se consumen dos bienes X y Y, de los que Alicia posee A_x y A_y y Beto B_x y B_y. Alicia y Beto deciden intercambiar entre ellos ambos bienes a precios P_X y P_Y respectivamente y su utilidad es de la forma $U_i = \ln X + \ln Y$.

   a) Halle la curva de contrato (todas las asignaciones pareto eficientes posibles bajo intercambio).
   Las asignaciones pareto eficientes están dadas por las soluciones al problema

   $$\max_{X_A, X_B, Y_A, Y_B} \ln X_A + \ln Y_A \texttt{ Sujeto a: } \ln X_B + \ln Y_B = \overline{U_B}, X_A + X_B = X, Y_A + Y_B = Y$$

   donde X y Y son las dotaciones de los bienes.
   El lagrangeano del problema es

   $$L = \ln X_A + \ln Y_A - \lambda_1(\ln X_B + \ln Y_B - \overline{U_B}) - \lambda_2(X_A + X_B - X) - \lambda_3(Y_A + Y_B - Y)$$

   las CPO (distintas a las restricciones) son

   $$\frac{1}{X_A} = \lambda_2, \frac{1}{Y_A} = \lambda_3, \frac{\lambda_1}{X_B} = \lambda_2, \frac{\lambda_1}{Y_B} = \lambda_3.$$

   De aquí se deduce que

   $$\frac{X_B}{Y_B} = \frac{X_A}{Y_A} = \frac{X}{Y}.$$

   Esto caracteriza a las asignaciones pareto eficientes. La curva de contrato es entonces la recta que une las dos esquinas opuestas de la C.E.

b) Encuentre las funciones de demanda del bien X y Y por parte de Alicia y Beto.

El problema de Alicia es

$$\max_{X_A,Y_A} \ln X_A + \ln Y_A \texttt{ Sujeto a: } P_X X_A + P_Y Y_A = P_X A_x + P_Y A_y.$$

El lagrangeano del problema es

$$L = \ln X_A + \ln Y_A - \lambda(P_X X_A + P_Y Y_A - P_X A_x - P_Y A_y)$$

y las CPO además de las restricciones son

$$\frac{1}{X_A} = \lambda P_X, \frac{1}{Y_A} = \lambda P_Y.$$

Reemplazando en la restricción todo en términos de λ, obtenemos

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2}$$

y

$$X_A = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_X}, Y_A = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_Y}.$$

Análogamente

$$X_B = \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_X}, Y_B = \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_Y}.$$

c) Encuentre las funciones de exceso de demanda $Z_X(P_X, P_Y)$ y $Z_Y(P_X, P_Y)$ y pruebe que son homogéneas de grado cero en los precios, continuas y que cumplen la ley de Walras.

Tenemos que

$$Z_X(P_X, P_Y) = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_X} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_X} - A_x - B_x$$

y

$$Z_Y(P_X, P_Y) = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_Y} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_Y} - A_y - B_y.$$

$$\begin{aligned} Z_X(tP_X, tP_Y) = \\ \frac{tP_X A_x + tP_Y A_y}{2tP_X} + \frac{tP_X B_x + tP_Y B_y}{2tP_X} - A_x - B_x = \\ \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_X} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_X} - A_x - B_x = \\ t^0 Z_X(P_X, P_Y) \end{aligned}$$

Tenemos que

lo que prueba la homogeneidad de grado 0.

La continuidad puede ser verificada para $P, X, P_Y > 0$, pues los denominadores están bien definidos.

La ley de Walras se verifica también, pues

$$\begin{aligned} P_X Z_X(P_X, P_Y) + P_Y Z_Y(P_X, P_Y) = \\ \frac{P_X A_x + P_y A_y}{2} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2} - P_X A_x - P_x B_x + \\ \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2} - P_Y A_y - P_Y B_y = 0. \end{aligned}$$

d) Encuentre los precios relativos $p = P_X/P_Y$ de equilibrio. Demuestre que a estos precios, se obtiene una asignación de recursos que cae sobre la curva de contrato.

Por la ley de Walras es suficiente resolver

$$Z_X(P_X, P_Y) = 0.$$

Esto es equivalente a

$$p = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y}{X}$$

que son los precios relativos de equilibrio.

Sabemos que se cumple que

$$\frac{X_A}{Y_A} = \frac{X_B}{Y_B} = TMS = \frac{P_Y}{P_X} = \frac{X}{Y}$$

que quiere decir que la asignación es pareto eficiente.

e) Suponga que un planeador social quiere reasignar las dotaciones iniciales de modo que al final, el resultado del mercado sea el mismo para Alicia y Beto (es decir queden con iguales cantidades de ambos bienes). ¿Puede lograr el planeador este fin?. Si es posible, halle todas las asignaciones de dotaciones iniciales que lo logran.

Esta asignación es posible como resultado del intercambio únicamente si es pareto óptima. Sin embargo, esta asignación cumple que

$$\frac{X_A}{Y_A} = \frac{X_B}{Y_B} = \frac{X}{Y}$$

y es eficiente.

Debemos ver que dotaciones iniciales arrojan esta asignación del mercado.

Con las dotaciones dadas y los precios de equilibrio, obtenemos:

$$X_A = \frac{A_x}{2} + \frac{A_y X}{2Y}, X_B = \frac{B_x}{2} + \frac{B_y X}{2Y}$$

Se debe cumplir entonces que

$$A_x Y + A_y X = B_x Y + B_y X$$

que es equivalente a

$$(A_x, A_y) = (B_x, B_y).$$

Estas son las dotaciones iniciales que dan como resultado del mercado una asignación igualitaria.

2. Considere una economía de intercambio con dos consumidores (A y B), y funciones de utilidad $u_A = x_1 - \frac{1}{8}x_2^{-8}$ y $u_B = x_2 - \frac{1}{8}x_1^{-8}$. Suponga que las dotaciones iniciales son $e_A = c(2, r)$ y $e_B = (r, 2)$.

   a) Caracterice el conjunto de asignaciones Pareto eficiente. Grafíquelo.

   Primero se encuentra la $TSMT^i = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_1}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_2}}$ donde $i = \{A, B\}$.

   $$TSMT^A = \frac{1}{x_{2A}^{-9}}$$

   $$TSMT^B = \frac{x_{1B}^{-9}}{1}$$

   Igualando las tasas marginales de sustitución:

   $$\frac{1}{x_{2A}^{-9}} = \frac{x_{1B}^{-9}}{1}$$

   Elevando a la 9

   $$\frac{1}{x_{2A}} = \frac{x_{1B}}{1}$$

   Teniendo en cuenta que $x_{1B} + x_{1A} = 2 + r$ y que $x_{2B} + x_{2A} = 2 + r$, se tiene que:

   $$x_{2A} = \frac{1}{2 + r - X_{1A}}$$

b) Encuentre el equilibrio walrasiano (Aquí encontraré que existe más de un equilibrio, es decir que el equilibrio no es único. De hecho, Arrow demostró que las condiciones para que el equilibrio sea único son extremas: Que todos los agentes tengan funciones de utilidad Cobb-Douglas). Pista: use $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$ y prueben que las relaciones de precios $p = \{2, 1, 1/2\}$, son todas de equilibrio.

El problema de A es

$$\max_{x_{1A}, x_{2A}} x_{1A} - \frac{1}{8} x_{2A}^{-8} \texttt{ Sujeto a: } P_1 X_{1A} + P_2 X_{2A} = 2P_1 + rP_2.$$

El lagrangeano del problema es

$$L = x_{1A} - \frac{1}{8} x_{2A}^{-8} - \lambda(P_1 X_{1A} + P_2 X_{2A} - 2P_1 + rP_2)$$

De donde se puede deducir que:

$$x_{2A}^* = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/9} = p^{\frac{1}{9}}$$

$$x_{1A}^* = \frac{2P_1 + rP_2 - P_2\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/9}}{P_1} = 2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}}$$

De manera análoga:

$$x_{1B}^* = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1/9} = p^{\frac{-1}{9}}$$

$$x_{2B}^* = \frac{2P_2 + rP_1 - P_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1/9}}{P_2} = 2 + rp - p^{\frac{8}{9}}$$

De donde sale que (debido a que $x_{1B} + x_{1A} = 2 + r$):

$$2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}} + p^{\frac{-1}{9}} = 2 + r$$

Como se puede comprobar $p = \{2, 1, 1/2\}$ son soluciones a la ecuación cuando $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$. Graficando la función:

$$f(p) = 2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}} + p^{\frac{-1}{9}} - 2 - r$$

se puede comprobar.

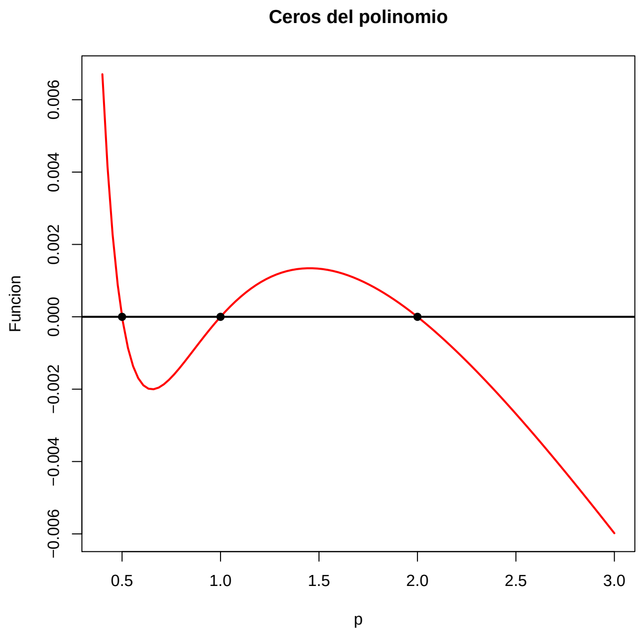

Figura 1: f(p)

c) Verifique que estas asignaciones pertenecen al conjunto de asignaciones Pareto eficiente.

Quisiéramos ver cuándo:

$$p^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}}}$$

Graficando la función $g(p) = p^{\frac{1}{9}} - \frac{1}{2+\frac{r}{p}-p^{\frac{-8}{9}}}$ vemos que tiene raíces en $p = \{2, 1, 1/2\}$.

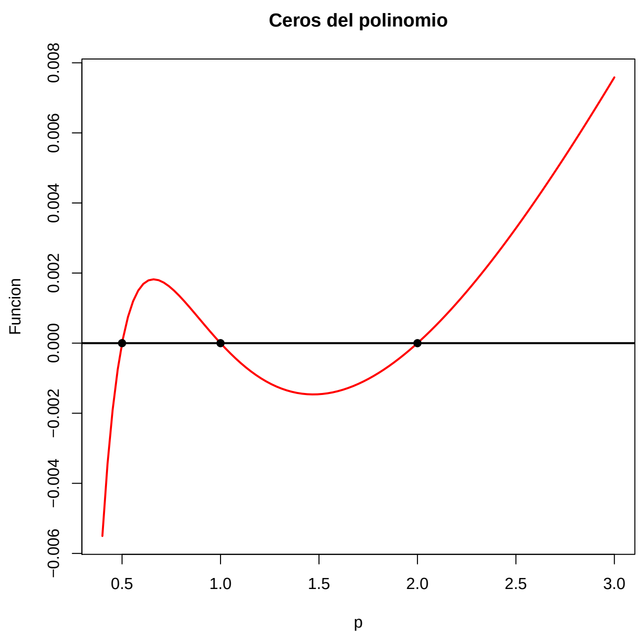
Ceros del polinomio
Funcion
−0.006
−0.004
−0.002
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
p

Figura 2: g(p)