Universidad de Los Andes
Microeconomía III
Taller 2

Miguel Espinosa y Mauricio Romero

1. Para las funciones de producción del taller pasado y suponiendo que $\alpha + \beta = 1$,

   a) Obtenga la elasticidad cruzada de la demanda de capital respecto al salario ¿Qué signo tiene?

   b) Obtenga la elasticidad demanda de trabajo a la producción ¿Qué signo tiene?

   c) ¿Cuál tecnología podría explicar mejor la situación actual en Colombia (Alto crecimiento del producto, precio del capital relativamente bajo y bajo crecimiento del trabajo)?

2. Para las funciones de producción:

   Para encontrar la demanda no condicionada de los factores, la funcion de oferta y la funcion de beneficios, lo haremos más adelante. Lo unico que deben tener en cuenta por ahora es que la firma desea maximizar beneficios ($\Pi = py - wx$), por endecuando la función de producción posee rendimientos constantes o crecientes a escala, esto es cuando su grado de homogeneidad no es inferior a 1, la firma puede llegar a obtener beneficios "infinitos", pues si aumenta el uso de sus insumos, aumenta su producción más que proporcionalmente (o proporcionalmente) y por ende puede obtener mayor beneficios. Esto implicaria que no hay solución al problema primal de la firma.

   a) $f(\mathbf{x}) = [\text{mín}(a_1x_1, a_2x_2, ..., a_nx_n)]^\gamma$ con $\gamma > 0$, $\forall j$ $a_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

   $TMST_{x_ix_j} = -\infty$

   Demostración:

   No esta bien definida pues la función no es derivable, sin embargo intiutivamente es $-\infty$

Homogeneidad$=\gamma$

Demostración:

$f(\lambda\mathbf{x}) = [\text{mín}(\lambda a_1x_1, \lambda a_2x_2, ..., \lambda a_nx_n)]^\gamma =$

$[\lambda \, \text{mín}(a_1x_1, a_2x_2, ..., a_nx_n)]^\gamma =$

$\lambda^\gamma [\text{mín}(a_1x_1, a_2x_2, ..., a_nx_n)]^\gamma =$

$\lambda^\gamma f(x)$

Elasticidad a escala$=\gamma$

Demostración:

$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} \frac{(t)}{f(tx)}$

$f(tx) = t^\gamma f(x)$

$\frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} = \gamma t^{\gamma-1} f(x)$

$e(x) = \gamma t^{\gamma-1} f(x) \frac{(t)}{t^\gamma f(x)} = \gamma$

Elasticidad de sustitución$=0$

Demostración:

Puesto que la $TMST$ es $-\infty$, entonces $\sigma = 0$.

Ahora para la solución a el problema se debe tener en cuenta que en el óptimo $a_1x_1 = a_2x_2 = ... = a_3x_3$, por ende $y = (a_ix_i)^\gamma$ y entonces $x_i = \frac{y^{1/\gamma}}{a_i}$, que son las demandas condicionadas.

b) Para encontrar la demanda condicionada de los factores de debe resolver el problema $\text{mín}\, wx$ s.a. $y \leq f(x_1, ..., x_n)$, esto se planteando el lagrangeano, derivando con respecto a cada factor, dejando todos los factores en terminos de uno solo (cualquiera), reemplazando estas ecuaciones en la restriccion y despejando. Para los siguientes casos unicamento vamos a plantear la solución por brevedad.

$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right)^\gamma$ con $\gamma > 0$, $\forall j \; a_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

$TMST_{x_ix_j} = \frac{a_i}{a_j}$

Demostración:

$TMST_{x_ix_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{x_i}}{\frac{\partial f(x)}{x_j}} = \frac{\gamma(\sum a_nx_n)^{\gamma-1}a_i}{\gamma(\sum a_nx_n)^{\gamma-1}a_j} = \frac{a_i}{a_j}$

Homogeneidad=γ
Demostración:
$f(\lambda x) = (\sum \lambda a_n x_n)^\gamma = (\lambda \sum a_n x_n)^\gamma = \lambda^\gamma (\sum a_n x_n)^\gamma = \lambda^\gamma f(x)$

Elasticidad a escala=γ
Demostración:
$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} \frac{(t)}{f(tx)}$
$f(tx) = t^\gamma f(x)$
$\frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} = \gamma t^{\gamma-1} f(x)$
$e(x) = \gamma t^{\gamma-1} f(x) \frac{(t)}{t^\gamma f(x)} = \gamma$

Elasticidad de sustitución=∞
Demostración:
Puesto que la $TMST$ es constante, entonces tenemos $\sigma = \frac{\partial (\frac{x_j}{x_i})}{\partial TMST} = \infty$.

Demanda condicionada: Ver la solución al ultimo punto.

c) $f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^\rho \right)^{\frac{\gamma}{\rho}}$ con $\gamma, \rho > 0, \forall j \ a_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

$TMST_{x_i x_j} = \frac{a_i x_i^{\rho-1}}{a_j x_j^{\rho-1}}$
Demostración:
$TMST_{x_i x_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{x_i}}{\frac{\partial f(x)}{x_j}} = \frac{\frac{\gamma}{\rho} (\sum a_n x_n^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}-1} \rho a_i x_i^{\rho-1}}{\frac{\gamma}{\rho} (\sum a_n x_n^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}-1} \rho a_j x_j^{\rho-1}} = \frac{a_i x_i^{\rho-1}}{a_j x_j^{\rho-1}}$

Homogeneidad=γ
Demostración:
$f(\lambda x) = (\sum a_i (\lambda x_i)^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = (\lambda^\rho \sum a_i x_i^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = (\lambda^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} (\sum a_i x_i^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = \lambda^\gamma f(x)$

Elasticidad a escala=γ
Demostración:
$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} \frac{(t)}{f(tx)}$
$f(tx) = t^\gamma f(x)$
$\frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} = \gamma t^{\gamma-1} f(x)$
$e(x) = \gamma t^{\gamma-1} f(x) \frac{(t)}{t^\gamma f(x)} = \gamma$

Elasticidad de sustitución$=\frac{1}{1-\rho}$
Demostración:
Puesto que la $TMST = \frac{a_i x_i^{\rho-1}}{a_j x_j^{\rho-1}}$ entonces:
$dTMST = dln(a_i x_i^{\rho-1}) - dln(a_j x_j^{\rho-1}) = dln(a_i) + dln(x_i^{\rho-1}) - dln(a_j) - dln(x_j^{\rho-1}) = d(\rho-1)ln(x_i) - d(\rho-1)ln(x_j) = (\rho-1)\frac{dx_i}{x_i} - (\rho-1)\frac{dx_j}{x_j}$

$d(ln(\frac{x_j}{x_i})) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$
Entonces:
$\sigma = \frac{-(\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j})}{(\rho-1)(\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j})} = \frac{1}{1-\rho}$

Demanda condicionada: Se tiene que $TMST_{x_i x_j} = \frac{a_i x_i^{\rho-1}}{a_j x_j^{\rho-1}} = \frac{w_i}{w_j}$ de donde se puede deducir que $x_i = \left(\frac{w_i}{w_j}\frac{a_j}{a_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} x_j$, de donde se deduce que $q = \sum a_i \left(\frac{w_i}{w_j}\frac{a_j}{a_i}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} x_j^{\rho}$, de donde se deduce que: $q^{\frac{1}{\gamma}} = x_j \left(\frac{a_j}{w_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \sum a_i \left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}$ de donde se deduce que:

$$x_j = \frac{q^{\frac{1}{\gamma}}}{\left(\frac{a_j}{w_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\sum a_i \left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

d) $f(\mathbf{x}) = A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ con $A > 0$, $\forall j$ $\alpha_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

$TMST_{x_i x_j} = \frac{a_i x_j}{a_j x_i}$
Demostración:
$TMST_{x_i x_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{x_i}}{\frac{\partial f(x)}{x_j}} = \frac{A \prod x_n^{\alpha n} \frac{\alpha_i}{x_i}}{A \prod x_n^{\alpha n} \frac{\alpha_j}{x_j}} = \frac{a_i x_j}{a_j x_i}$

Homogeneidad$=\sum \alpha_i$
Demostración:
$f(\lambda x) = A \prod (\lambda x_i)^{\alpha_i} = \lambda^{\sum \alpha_i} A \prod (x_i)^{\alpha_i} = \lambda^{\sum \alpha_i} f(x)$

Elasticidad a escala$=\sum \alpha_i$
Demostración:
$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} \frac{(t)}{f(tx)}$
$f(tx) = t^{\sum \alpha_i} f(x)$

$\frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} = \sum \alpha_i t^{\sum \alpha_i - 1} f(x)$
$e(x) = \sum \alpha_i t^{\sum \alpha_i - 1} f(x) \frac{(t)}{t^{\sum \alpha_i} f(x)} = \sum \alpha_i$

Elasticidad de sustitución=1
Demostración:
Puesto que la $TMST = \frac{a_i x_j}{a_j x_i}$ entonces:
$dTMST = dln(a_i x_j) - dln(a_j x_i) = dln(a_i) + dln(x_j) - dln(a_j) - dln(x_i) = dln(x_j) - dln(x_i) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$

$d(ln(\frac{x_j}{x_i})) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$
Entonces:
$\sigma = \frac{\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j}}{\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j}} = 1$
Demanda condicionada: Se tiene que $\frac{a_i x_j}{a_j x_i} = \frac{w_i}{w_j}$ de donde se puede deducir que

$$x_j = \left(\frac{q}{A \prod \left(\frac{a_i}{w_i} \right)^{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\sum \alpha_i}} \frac{a_j}{w_j}$$

3. Definiendo la elasticidad a escala cómo $e(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{x}{f(x)}$, muestre con las funciones de producción del punto anterior que e (x) es exactamente el grado de homogeneidad de la función.(hágalo para cada función de producción). Demuestre además que $\frac{CMe}{Cmg} = e(x)$.

   En las notas de clase se encuentran ambas demostraciones. En cualquier caso el del grado de homogeneidad igual a $e(x)$ se encuentra en el punto anterior.

4. Verifique que las demandas condicionadas encontradas en el punto 1 cumplen con las tres propiedades enunciadas en las notas de clase. (1. $x(w; y)$ será homogénea de grado 0 en w , 2. Aumentos en los precios de los insumos no aumentarán la demanda de los insumos lo que quiere decir que para cualquier 3. Existen efectos simétricos en las demandas)

5. Dada la siguiente función de costos mín$(w_1, w_2, ..., w_n)y$

   a) Halle la función de producción
   La funcion de costos mín$(w_1, w_2, ..., w_n)y$ implica que se produce con el insumo mas barato, es decir que el empresario se enfrenta a una funcion de produccion de sustitutos perfectos donde

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$, donde utiliza el insumo k-esimo si: $\frac{\beta_k}{w_k} < \frac{\beta_i}{w_i}$ $\forall i \neq k$

b) Encuentre las demandas condicionadas de factores $x_k = \frac{y}{\beta_k}$ $x_i = 0$ $\forall i \neq k$

c) Encuentre la función de beneficios y la oferta. $\Pi = p\beta_k x_k - w_k x_k = x_k(p\beta_k - w_k)$ Si $p\beta_k - w_k > 0$ entonces se demanda infinito de x_k, se obtienen infinitos beneficios, y se oferta infinito de y. Si $p\beta_k - w_k = 0$ entonces se demanda cualquier cantidad de x_k, se obtienen beneficios cero, y se oferta cualquier cantidad de y. Si $p\beta_k - w_k < 0$ entonces no se demanda x_k, y no se oferta del bien y.