Universidad de Los Andes
Microeconomía III
Taller 4

Miguel Espinosa y Mauricio Romero

1. La idea de este equilibrio es enfocarnos en la formación de precios y el tanteador walrasiano. La idea de este tanteador es que va ajustando los precios hasta llegar al equilibrio, sin embargo como veremos a continuación este supuesto no siempre es realista.

   Recuerde el ejercicio anterior con una economía de intercambio con dos consumidores (A y B), y funciones de utilidad $u_A = x_{1A} - \frac{1}{8}x_{2A}^{-8}$ y $u_B = x_{2B} - \frac{1}{8}x_{1B}^{-8}$. Suponga que las dotaciones iniciales son $e_A = (2, r)$ y $e_B = (r, 2)$. Donde $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$ y los precios $p = \{2, 1, 1/2\}$, son todas de equilibrio.

   Cuando se resolvió el problema se llego a la conclusión de que el exceso de demanda de cada bien era

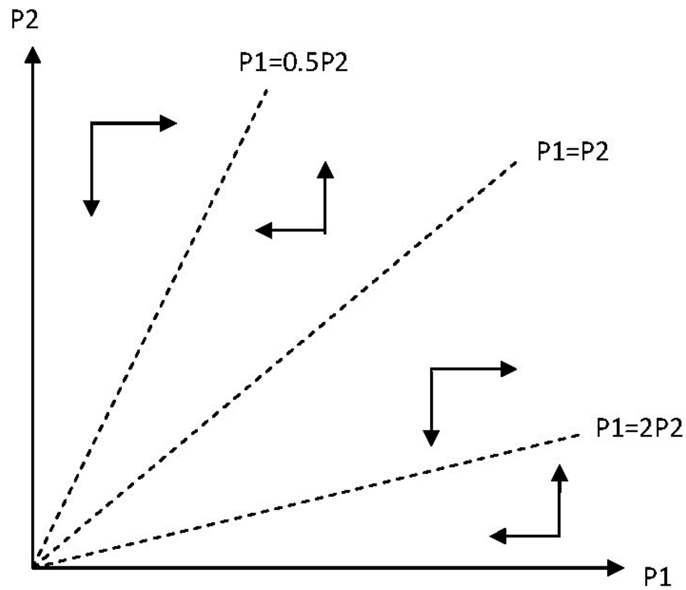
$$Z_1(p_1, p_2) = 2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}} + p^{\frac{-1}{9}} - 2 - r$$

$$Z_2(p_1, p_2) = p^{\frac{1}{9}} + 2 + rp - p^{\frac{8}{9}} - 2 - r$$

   donde $p = \frac{p_1}{p_2}$.

   Vamos a demostrar que es "difícil" que el tanteador llegue a $p = 1$, mientras que es "fácil" que llegue a $p = 0.5$ y $p = 2$.

   (a) Dibuje el diagrama de fase para las ecuaciones diferenciales $\frac{dp_1(t)}{dt} = z_1(p_1, p_2)$ y $\frac{dp_2(t)}{dt} = z_2(p_1, p_2)$



(b) Un equilibrio es localmente estable si cuando se tiene un vector de precios relativos inicial suficientemente cercano al de equilibrio, entonces los precios convergen a los de equilibrio. Demuestre que $p = 0.5$ y $p = 2$ son equilibrios estables mientras que $p = 1$ no lo es.

Como se puede ver en el diagrama de fase, si la relación de precios arranca cerca de $p_1 = 0.5p_2$ o de $p_1 = 2p_2$ los precios convergen a los de equilibrio. Sin embargo, sin importar que tan cercano arranquen los precios a la relación $p_1 = p_2$ estos nunca llegan a esta, sino a alguna de las otras dos.

(c) Utilizando el diagrama de fase demuestre la afirmación en negrilla. Piense en que pasaría si el tanteador walrasiano comienza con un precio relativo diferentes a los de equilibrio ¿Sería posible llegar a $p = 1$?

Nunca seria posible llegar a $p = 1$ a menos que el tanteador por suerte arranque en este valor.

2. Una asignación factible de recursos en una economía se dice libre de envidia si ningún agente preferiría estrictamente tener la asignación que a otro le corresponde.

(a) Usando el Segundo Teorema del Bienestar, ¿cómo podríamos redistribuir la dotación total de la economía, de tal manera que el equilibrio resultante bajo competencia perfecta sea libre de envidia? (En particular, la asignación de equilibrio es eficiente, por el primer teorema del bienestar).

Suponga que hay n individuos y k bienes. Si a cada individuo se le da la asignación $\frac{w}{n} = (\frac{w_1}{n}, \frac{w_2}{n}, ..., \frac{w_k}{n})$ el resultado (x, p) es libre de envidia.

Para demostrar esto suponga que x no es libre de envidia. Eso quiere decir que para algún individuo i se tiene $u_i(x_k) > u_i(x_i)$. Como x es una asignación de walras se debe tener que $x_k p > \frac{w}{n} p$ lo que contradice el hecho de que x_k es factible para k entonces $x_k p \leq \frac{w}{n} p$.

(b) Una asignación es justa (fair) si es, a la vez, libre de envidia y eficiente en sentido de Pareto. En una caja de Edgeworth, demuestre que las asignaciones libres de envidia no necesariamente son justas.

Sea una economía con dos bienes y dos individuos con preferencias $u_1(x_1, y_1) = x_1^{1/2} y_1^{1/2}$ y $u_2(x_2, y_2) = x_2^{1/4} y_2^{3/4}$, con dotaciones iniciales $w = (w_x, w_y) = (2, 2)$. Para este ejemplo la asignación igualitaria para cada individuo es $w/2 = (1, 1)$ Note que el conjunto de asignación libres de envidia es la intersección de los conjuntos $EF_i = \{x_i \in F | x_i \succeq w - x_i\}$ con $i = \{1, 2\}$. Esto es cierto puesto que cada agente no tiene envidia si prefiere lo que tiene a lo que tiene el otro.

En este caso:

$$EF_1 = \{(x_1, y_1) | x_1^{1/2} y_1^{1/2} \geq (2 - x_1)^{1/2} (2 - y_1)^{1/2}\}$$

Simplificando:

$$EF_1 = \{(x_1, y_1) | y_1 \geq 2 - x_1\}$$

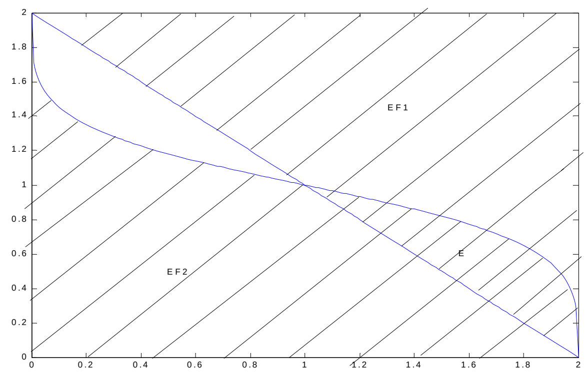
$$EF_2 = \{(x_2, y_2) | x_2^{1/4} y_2^{3/4} \geq (2 - x_2)^{1/4} (2 - y_2)^{3/4} \}$$

Simplificando:

$$EF_2 = \{(x_1, y_1) | y_1 \leq \frac{2(2 - x_1)^{1/3}}{x_1^{1/3} + (2 - x_1)^{1/3}}\}$$

El conjunto de asignaciones libres de envidia es: E=$\{(x_1, y_1) | 2 - x_1 \leq y_1 \leq \frac{2(2-x_1)^{1/3}}{x_1^{1/3}+(2-x_1)^{1/3}}$

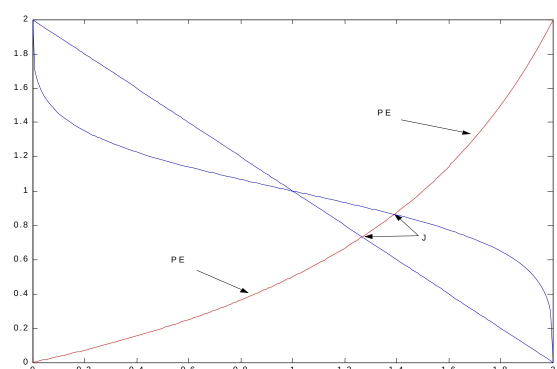
En la siguiente figura se encuentran graficados EF_1,EF_2 y E.



Por otro lado el conjunto de asignaciones pareto optimas es donde las tasas marginales de sustitucion son iguales para ambos individuos:

$$PO = \{(x_1, y_1)|y_1 = \frac{x_1}{3 - x_1}\}$$

En la siguiente figura se muestran las asignaciones pareto eficientes, y el conjunto de asignaciones justas (J).



3. En una economía existen dos productores que producen bienes A y B respectivamente. Las funciones de producción representativas son $A(K, L) = (L_A + 1)e^{K_A}$; $B(K, L) = L_B K_B$, las dotaciones iniciales para A son $L_A^0 = 1$; $K_A^0 = 2$, y la dotación para B es $L_B^0 = 2$; $K_B^0 = 3$. Suponga que los precios de los factores son w para L y r para K. Encuentre:

(a) La curva de contrato.

Esta se da cuanto las TMST son iguales... es decir:

$$TMST^A = \frac{1}{L_A+1} = TMST^B = \frac{K_B}{L_B}$$

Teniendo en cuenta que la dotación total de L es 3, entonces la curva de contrato está dada por

$$CC = \{(L_A, K_A) : K_B = \frac{L_B}{4-L_B}\}$$

(b) La TMT (Tasa marginal de transformación) e interprételo.

Primero encontremos el costo marginal de cada firma. Esto se hace primero resolviendo el problema de minimización de costos de cada firma

$\min r \cdot K_i + w \cdot L_i$ s.a. $F_i(K_i, L_i) = X_i$

Entonces para A tenemos que las demandas condicionadas de factores son:

$$L_A^* = \frac{r}{w} - 1$$

$$K_A^* = \ln(\frac{w}{r}) + \ln(A)$$

$$L_B^* = \left(\frac{rB}{w}\right)^{1/2}$$

$$K_B^* = \left(\frac{wB}{r}\right)^{1/2}$$

De donde se deduce que la función de costos marginales de cada firma es:

$$CM^A = \frac{r}{A}$$

$$CM^B = \left(\frac{wr}{B}\right)^{1/2}$$

Entonces

$$TMT = -\frac{CM^A}{CM^B} = -\left(\frac{rB}{Aw}\right)^{1/2}.$$

(c) La demanda por factores para cada productor.

Para encontrar la demanda por factores no condicionado resolvemos el problema primal de los productores y encontramos:

$$L_A^* = \frac{r}{w} - 1$$

$$K_A^* = 1 + 2\frac{w}{r}$$

$$L_B^* = \frac{3r + 2w}{2w}$$

$$K_B^* = \frac{3r + 2w}{2r}$$

(d) La relación precio de los factores.

Para esto encontramos el exceso de demanda de ambos mercados:

$$Z_K = \frac{5r + 6w}{2r} - 5$$

$$Z_L = \frac{5r}{2w} - 3$$

con lo que es facil ver que $\frac{r}{w} = \frac{6}{5}$

(e) Caracterice los equilibrios.

La relación de precios de equilibrio es $\frac{r}{w} = \frac{6}{5}$ y las cantidades de equilibro son:

$$L_A^* = \frac{r}{w} - 1 = 0.2$$

$$K_A^* = 1 + 2\frac{w}{r} = 2.66$$

$$L_B^* = \frac{3r + 2w}{2w} = 2.8$$

$$K_B^* = \frac{3r + 2w}{2r} = 2.33$$

(f) Muestre sus resultados en una caja de Edgeworth .

Ver figura 1.

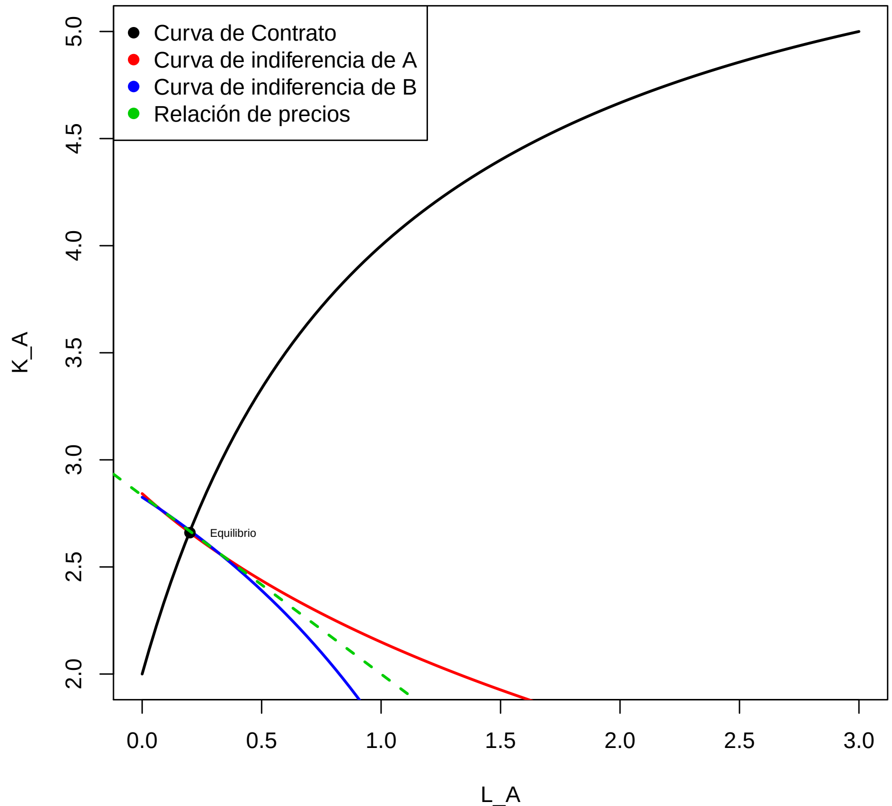


Figure 1: Caja de Edgeworth

(g) Muestre que relaciones de precios son estables utilizando un diagrama de fase para las ecuaciones diferenciales $\frac{dp_L(t)}{dt} = z_L(w,r)$ y $\frac{dp_K(t)}{dt} = z_K(w,r)$, donde Z_i es el exceso de demanda del factor i.

Asumiendo que $\frac{dp_L(t)}{dt} = z_L(w,r)$ y $\frac{dp_K(t)}{dt} = z_K(w,r)$, donde Z_i es el exceso de demanda del factor i, se puede ver fácilmente que: Ver figura 2.

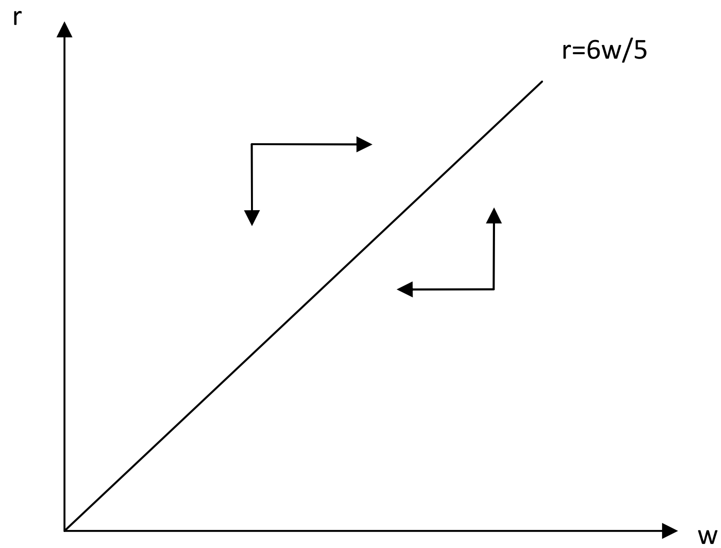


Figure 2: Diagrama de Fase

(h) ¿Son las asignaciones de equilibrio eficientes en el sentido de Pareto? **Si por el primer teorema del bienestar**

(i) ¿Es posible llegar a una asignación eficiente, en el sentido de Pareto, diferente cambiando las dotaciones iniciales? **Si por el primer teorema del bienestar**

(j) ¿Existe alguna asignación eficiente, en el sentido de Pareto, que no se pueda alcanzar con un equilibrio competitivo cambiando las dotaciones iniciales? **No por el segundo teorema del bienestar**

4. Considere la siguiente economía: Existen tres productos: leguma, tillip y quillip, dos consumidores (denominados 1 y 2) y dos empresas (denominadas x e y). La empresa x produce tillip a partir de la leguma de acuerdo con la tecnología lineal de producción $t = 3l$. Es decir, por cada unidad de leguma utilizada como factor de producción la empresa produce tres unidades de tillip. La empresa y produce quillip a partir de la leguma de acuerdo con la tecnología de producción $q = 4l$. Cada consumidor inicialmente posee 5 unidades de leguma y es propietario de un 50% de cada empresa. El consumidor 1 tiene una función de

utilidad dada por

$$u_1(t,q) = 6 + 0.4ln(t) + 0.6ln(q)$$

. El consumidor 2 tiene la función de utilidad

$$u_1(t,q) = 8 + ln(t) + ln(q)$$

.

¿Cuál es el equlibrio general de esta economía? Suponga que las empresas y los consumidores toman los precios como dados y desean maximizar sus beneficios.

La firma X (tillip) debe escoger el nivel de l_x^* óptimo, pero como los beneficios son lineales $\pi_x = p_t l - p_l(\frac{l}{3})$ (la función de producción tiene rendimientos constantes) se presentan tres casos:

1) $\frac{p_t}{p_l} > \frac{1}{3}$ no puede ser un precio relativo de equilibrio porque la firma demandaría infinita leguma.

2) $\frac{p_t}{p_l} = \frac{1}{3} \Rightarrow \pi_x = 0, l_x^*$ y la demanda de leguma está indeterminada.

3) $\frac{p_t}{p_l} < \frac{1}{3} \Rightarrow l_x^* = 0$ lo que no puede ser pues la producción de tillip sería cero y sin embargo la demanda de los agentes por tillip sería positiva (pues sus ingresoso son estrictamente positivos).

SI hacemos un análisis similar para la firma que produce quillip deducimos que:

La firma Y (quillip)debe escoger el nivel de l_y^* óptimo, pero como los beneficios son lineales $\pi_y = p_q l - p_l(\frac{l}{4})$ (la función de producción tiene rendimientos constantes) se presentan tres casos: $\frac{p_q}{p_l} = \frac{1}{4} \Rightarrow \pi_y = 0, l_y^*$ y la demanda de leguma es indeterminada.

Ell consumidor 1

Max $6 + 0{,}4 \ln t + 0{,}6 \ln q$ sujeto a $p_t t + p_q q \leq 5p_l + 0{,}5\pi_x + 0{,}5\pi_y$
$L = 6 + 0{,}4 \ln t + 0{,}6 \ln q - \lambda(p_t t + p_q q - 5p_l - 0{,}5\pi_x - 0{,}5\pi_y)$
$L_t = \frac{0{,}4}{t} - \lambda p_t = 0$
$L_q = \frac{0{,}6}{q} - \lambda p_q = 0$
$L_\lambda = p_t t + p_q q = 5p_l + 0{,}5\pi_x + 0{,}5\pi_y$
$TMS^1 = \frac{\frac{0{,}4}{t}}{\frac{0{,}6}{q}} = \frac{p_t}{p_q} \Rightarrow \frac{2q}{3t} = \frac{p_t}{p_q} \Rightarrow t = \frac{2p_q q}{3p_t}$
$p_t(\frac{2qp_q}{3p_t}) + p_q q = (\frac{2}{3})qp_q + qp_q = (\frac{5}{3})qp_q = 5p_l + 0{,}5\pi_x + 0{,}5\pi_y$

$q^{*1} = 3(\frac{p_l}{p_q}) + \frac{3(\pi_x+\pi_y)}{10p_q}$
$t^{*1} = \frac{2p_q}{3p_t}\left(3(\frac{p_l}{p_q}) + \frac{3}{10p_q}(\pi_x+\pi_y)\right) = 2\frac{p_l}{p_t} + \frac{\pi_x+\pi_y}{5p_t}$
El consumidor 2

Max $8 + \ln t + \ln q$ sujeto a $p_t t + p_q q \leq 5p_l + 0{,}5\pi_x + 0{,}5\pi_y$
$L = 8 + \ln t + \ln q - \lambda(p_t t + p_q q - 5p_l - 0{,}5\pi_x - 0{,}5\pi_y)$
$L_t = \frac{1}{t} - \lambda p_t = 0$
$L_q = \frac{1}{q} - \lambda p_q = 0$
$L_\lambda = p_t t + p_q q = 5p_l$
$TMS^2 = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{q}} = \frac{p_t}{p_q} \Rightarrow \frac{q}{t} = \frac{p_t}{p_q} \Rightarrow t = \frac{p_q q}{p_t}$
$p_t(\frac{qp_q}{p_t}) + p_q q = 2p_q q = 5p_l + 0{,}5\pi_x + 0{,}5\pi_y$
$q^{*2} = (\frac{5}{2})(\frac{p_l}{p_q}) + \frac{\pi_x+\pi_y}{4p_q}$
$t^{*2} = \frac{p_q}{p_t}\left(\frac{5}{2}(\frac{p_l}{p_q}) + \frac{\pi_x+\pi_y}{4p_q}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{p_l}{p_t}\right) + \frac{\pi_x+\pi_y}{4p_t}$

Equilibrio:

Afrimación: El mercado de leguma sólo podría estar en equilibrio si $\frac{p_q}{p_l} = \frac{1}{4}$ y $\frac{p_t}{p_l} = \frac{1}{3}$. Para verificar esto obsérvese que en este caso $\pi_x = 0, \pi_y = 0$. Por lo tanto las funciones de exceso de demanda son:

$$\begin{aligned} Z_q(p) &= q^{*1} + q^{*2} - q^* \\ &= 3\frac{p_l}{p_q} + \frac{5}{2}\frac{p_l}{p_q} - 4l_y^* = 0 \\ &= 3(4) + \frac{5}{2}(4) - 4l_y^* = 0 \\ \Rightarrow &\ l_y^* = 5{,}5 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Z_t(p) &= t^{*1} + t^{*2} - t^* \\ &= 2\frac{p_l}{p_t} + +\frac{5}{2}\left(\frac{p_l}{p_t}\right) - 3l_x^* = 0 \\ &= 2 * 3 + +\frac{5}{2}(3) - 3l_x^* = 0 \\ \Rightarrow &\ l_x^* = 4{,}5 \end{aligned}$$

Se verifica entonces que el equilibrio de los mercados de tillip y quillip implica el equilibrio del mercado de leguma (ley de Walras) puesto que lo anterior implica $l_x^* + l_y^* = 10$. Adicionalmente, si $p_q = \frac{1}{4}p_l$ y $p_t = \frac{1}{3}p_l$, entonces $\frac{p_t}{p_q} = \frac{4}{3}$ y $q^{*1} = 12$ y $t^{*1} = 6$. Se cumple entonces que $TMS^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{q^{*1}}{t^{*1}}\right) = \frac{p_t}{p_q}$, tambien se verifica facilmente que $TMS^2 = \frac{p_t}{p_q}$. Por lo tanto, este vector de precios es un equilibrio Walrasiano.

El equilibrio general de esta economía es

$$(p_t, p_q, p_l, t^{*1}, q^{*1}, t^{*2}, q^{*2}, t, l_x, q, l_y) = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, 1, 6, 12, \tfrac{15}{2}, 10, \tfrac{27}{2}, \tfrac{9}{2}, 22, \tfrac{11}{2})$$

5. Atontado y Bobalicón comparten una casa. La casa tiene un jardín de rosas. Tanto a Atontado como a Bobalicón les gusta mirar las rosas de su jardín. Denotamos el numero de rosas como x y la cantidad de dinero que cada uno tiene para gastar en otros bienes como y_a y y_b. Sus preferencias están descritas por $U_a(x, y_a)$ y $U_b(x, y_b)$. Denote sus riquezas por w_a y w_b. El hogar tendría que gastar $C(x)$ pesos para tener x rosas.

   (a) Escriba el problema de maximización que caracteriza las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto.

$$L = U_a(x, y_a) + \lambda_1(U_b(x, y_b) - \overline{U}) + \lambda_2(w_a + w_b - y_a - y_b - c(x))$$

   (b) Derive la condición de optimalidad. Al derivar, igualar a cero, y jugar un poco con las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\frac{\frac{\partial U_a}{\partial x}}{\frac{\partial U_a}{\partial y}} + \frac{\frac{\partial U_b}{\partial x}}{\frac{\partial U_b}{\partial y}} = C'(x)$$

   (c) Ahora suponga que entre ellos deciden establecer el siguiente mecanismo: Cada uno paga $t_i C(x)$ (donde $t_a + t_b = 1$ para que las rosas estén completamente financiadas). Demuestre que si cada agente maximiza su utilidad individualmente se llegara al óptimo social. Encuentre los valores de t_i que coinciden con este optimo.

Cada quien maximiza

$$L = U_i + \lambda(w_i - y_i - t_i C(x))$$

Lo cual devuelve las condiciones de primer orden:

$$\frac{\frac{\partial U_i}{\partial x}}{\frac{\partial U_i}{\partial y}} = t_i C'(x)$$

Sumando ambas ecuaciones (cuando $i = a$ y cuando $i = b$) obtenemos:

$$\frac{\frac{\partial U_a}{\partial x}}{\frac{\partial U_a}{\partial y}} + \frac{\frac{\partial U_b}{\partial x}}{\frac{\partial U_b}{\partial y}} = t_a C'(x) + t_b C'(x) = C'(x)$$

Ahora pra encontrar el valor de t_i que coincide con el optimo note que

$$\frac{\partial U_i}{\partial x} = t_i C'(x)$$

y por ende

$$t_i = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x}}{C'(x)}$$

6. Suponga que A-soft es una empresa dedicada a desarrollar software de alta calidad. Por su parte B-Ing, es una firma de ingenieria. Ambas firmas están en el mismo pueblo y los trabajadores de ambas firmas comparten sus conocimientos a diario entre ellos. Por lo tanto, cada vez que A-soft desarrolla nuevo software, los ingenieros de B-ing se enteran de los nuevos metodos y son más productivos. De hecho, si h es el nivel de desarrollo de A-soft, su ganancia está dada por $\pi_A = ah^{1/2} - h$ y la ganancia de B está dada por $\pi_B = bh^{1/2}$. El director del pueblo se da cuenta que con ciertas medidas económicas el nivel de desarrollo h podría ser mayor y propone varias opciones:

   (a) Que ambas empresas se fusionen. Encuentre en este caso el nivel de desarrollo h que se eligirá y las ganancias agregadas.

   En este caso, la firma fusionada maximizaría

   $$pi_A + pi_B = (a+b)h^{1/2} - h.$$

   Se debe cumplir la CPO

   $$\frac{(a+b)}{2h^{1/2}} = 1 \to h = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

   y las ganancias agregadas serán $(a+b)/4$.

   (b) Poner un subsidio τ a A-soft. Calcule el subsidio ideal si se desean maximizar las ganancias de las empresas. Encuentre el nivel de desarrollo de equilibrio con este impuesto.

   Si existe un subsidio, la firma A-soft maximiza

   $$\pi_A = ah^{1/2} - h + \tau h$$

   y elige h de acuerdo a la CPO

   $$\frac{a}{2h^{1/2}} = 1 - \tau \to h = \frac{a^2}{4(1-\tau)^2}$$

   Como se desea que $h = \frac{(a+b)^2}{4}$, τ debe cumplir

   $$\frac{a}{2(1-\tau)} = \frac{(a+b)}{2} \to \tau = \frac{b}{a+b}.$$

(c) Declarar a A-soft como dueña del desarrollo tecnológico y oblicar a B-ing a pagar un precio p por cada unidad de desarrollo que use. Encuentre en este caso el precio p y el nivel de desarrollo de equilibrio.

En este caso, A-soft maximiza

$$\pi_A = ah^{1/2} - h + ph.$$

Se debe cumplir la CPO

$$p = 1 - \frac{a}{2h^{1/2}}$$

que nos da la oferta inversa de nivel de desarrollo en función del precio p.

B-ing, maximiza

$$\pi_B = bh^{1/2} - ph.$$

Se debe cumplir la CPO

$$p = \frac{b}{2h^{1/2}}$$

que nos da la demanda inversa de nivel de desarrollo en función del precio p.

El equilibrio de este nuevo mercado esta dado por $p^s = p^d$ o:

$$1 - \frac{a}{2h^{1/2}} = \frac{b}{2h^{1/2}}$$

de donde

$$1 = \frac{a+b}{2h^{1/2}} \rightarrow h = \frac{(a+b)^2}{4}$$

y

$$p = \frac{b}{a+b}.$$

Note que además $\pi_A + \pi_B = (a+b)^2/4$.

(d) Explique por qué la situación planteada constituye una externalidad. Contraste el resultado de cada una de las soluciones planteadas contra el del mercado sin nignuna de las soluciones.

Es una externalidad porque el efecto es directo y no a través de precios ni salarios. No hay un mercado para la información que los trabajadores tranzan a diario.

El problema de buscar la fusión es que B-ing tiene incentivos para no cooperar. El problema del impuesto es que necesito información de a y de b. Ambos agentes tienen incentivos a esconder esta información o modificarla. El problema con el mercado es que se asume un resultado competititvo entre una forma oferente y una firma demandante. Ésto no sucede a no ser de que existan más firmas que produscan la externalidad y otras más que sean beneficiadas.

En el escenario de mercado, la firma A-soft eligirá h de acuerdo a

$$\frac{a}{2h^{1/2}} = 1 \to h = \frac{a^2}{4}.$$

Tenemos que este nivel será menor que el óptimo $(a+b)^2/4$, lo que se ve reflejado en un nivel de ganancia agregada de $a^2/4 + ab/2$ menor a $(a+b)^2/4$.