

Universidad de Los Andes
Microeconomía III
Taller 1

Miguel Espinosa y Mauricio Romero

1. Considere que la firma minimiza los costos, sujeto a un nivel de producción q . Para cada una de las siguientes funciones de producción:

- $Q(K, L) = K^\alpha L^\beta$ con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$
- $Q(K, L) = \min(\alpha K, \beta L)$ con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$
- $Q(K, L) = (\alpha K^\rho + \beta L^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$

En todos los casos las resuelven el siguiente problema: $\min wL + rK$ s.a. $q = Q(K, L)$, lo que se traduce en el lagrangeano (para el primer y el tercer caso): $L = wL + rK + \lambda(q - Q(K, L))$. para el primer y el tercer caso las condiciones de primer orden resultan en la siguiente relación: $\frac{w}{r} = \frac{Q_L}{Q_K}$

Para el primer caso:

$$K^* = \left(\frac{q}{\left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$L^* = \left(\frac{q}{\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Para el segundo caso, se tiene que $\alpha K = \beta L$, por ende

$$K^* = \frac{q}{\alpha}$$

$$L^* = \frac{q}{\beta}$$

Para el tercer caso, se tiene que:

$$K^* = \frac{q}{\left(\alpha + \beta \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$$L^* = \frac{q}{\left(\beta + \alpha \left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

- a) Obtenga la elasticidad de sustitucion entre K y L. Para todos los casos

$$\frac{\partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial \ln(TMST)}$$

Para el primer caso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial \ln(TMST)} &= \\ \frac{\partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial \ln\left(\frac{\beta K}{\alpha L}\right)} &= \\ \frac{\partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)} &= \\ \frac{\partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)} &= 1 \end{aligned}$$

Para el segundo caso no esta bien definida.

Para el tercer caso:

$$\frac{\partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial \ln(TMST)} = \frac{\partial \ln(K) - \partial \ln(L)}{\partial \ln\frac{\alpha}{\beta} + (\rho - 1)(\partial \ln(L) - \partial \ln(K))} = \frac{1}{1 - \rho}$$

pues $\partial \ln\frac{\alpha}{\beta} = 0$ ya que α y β son constantes y $(\rho - 1)(\partial \ln(L) - \partial \ln(K)) = (1 - \rho)(\partial \ln(K) - \partial \ln(L))$.

- b) De ahora en adelante suponga $\alpha + \beta = 1$ ¿Bajo cual tecnologia se espera que la demanda de trabajo sea mas elastica (con respecto al salario)?

Note primero que en el segundo caso la demanda de trabajo no depende del salario, por lo que su elasticidad es 0.

$$L_1^* = \left(\frac{q}{\left(\frac{\beta r}{\alpha w} \right)^\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Entonces

$$\frac{\partial \ln L_1^*}{\partial \ln w} = \frac{\frac{1}{\alpha+\beta} (\partial \ln q - \beta \partial \ln(\beta r) + \beta \partial \ln(w\alpha))}{\partial \ln w} = \frac{\frac{1}{\alpha+\beta} (\beta \ln w)}{\partial \ln w} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \beta$$

$$L_3^* = \frac{q}{\left(\beta + \alpha \left(\frac{\beta r}{\alpha w} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_1^*}{\partial \ln w} &= \frac{\partial L_1^*}{\partial w} \frac{w}{L_1^*} = \frac{-q \frac{1}{\rho} \left(\beta + \alpha \left(\frac{\beta r}{\alpha w} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \alpha \left(\frac{\beta r}{\alpha} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \frac{-\rho}{\rho-1} w^{\frac{1-2\rho}{\rho-1}}}{\left(\beta + \alpha \left(\frac{\beta r}{\alpha w} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{2}{\rho}}} \frac{w}{\left(\beta + \alpha \left(\frac{\beta r}{\alpha w} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{\rho}}} = \\ &= \frac{\alpha \left(\frac{\beta r}{\alpha} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \frac{1}{\rho-1} w^{\frac{-\rho}{\rho-1}}}{\beta + \alpha \left(\frac{\beta r}{\alpha w} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \end{aligned}$$

2. Para las funciones de producción del punto anterior y suponiendo que $\alpha + \beta = 1$,

a) Obtenga la elasticidad cruzada de la demanda de capital respecto al salario ¿Qué signo tiene?

Para el primer caso, análogo a la demanda del trabajo con respecto al salario, se tiene que:

$$\frac{\partial \ln L_1^*}{\partial \ln w} = \alpha$$

$$\frac{\partial \ln L_2^*}{\partial \ln w} = 0$$

b) Obtenga la elasticidad demanda de trabajo a la producción ¿Qué signo tiene?

$$\frac{\partial \ln L_1^*}{\partial \ln q} = 1$$

$$\frac{\partial \ln L_2^*}{\partial \ln q} = \frac{1}{\beta}$$

$$\frac{\partial \ln L_3^*}{\partial \ln q} = 1$$

- c) ¿Cuál tecnología podría explicar mejor la situación actual en Colombia (Alto crecimiento del producto, precio del capital relativamente bajo y bajo crecimiento del trabajo)?
3. Para las funciones de producción: Para cada función encuentre la $TMST_{x_i x_j}$, el grado de homogeneidad, rendimientos a escala, la elasticidad de sustitución, la función de beneficio, la función de oferta, la demanda condicional de factores y la demanda no condicional de factores.

Para encontrar la demanda no condicionada de los factores, la función de oferta y la función de beneficios, lo haremos más adelante. Lo único que deben tener en cuenta por ahora es que la firma desea maximizar beneficios ($\Pi = py - wx$), por ende cuando la función de producción posee rendimientos constantes o crecientes a escala, esto es cuando su grado de homogeneidad no es inferior a 1, la firma puede llegar a obtener beneficios “infinitos”, pues si aumenta el uso de sus insumos, aumenta su producción más que proporcionalmente (o proporcionalmente) y por ende puede obtener mayor beneficios. Esto implicaría que no hay solución al problema primal de la firma.

a) $f(\mathbf{x}) = [\text{mín}(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n)]^\gamma$ con $\gamma > 0, \forall j a_j, x_j \in \mathbb{R}_+$
 $TMST_{x_i x_j} = -\infty$

Demostración:

No está bien definida pues la función no es derivable, sin embargo intuitivamente es $-\infty$

Homogeneidad = γ

Demostración:

$$f(\lambda \mathbf{x}) = [\text{mín}(\lambda a_1 x_1, \lambda a_2 x_2, \dots, \lambda a_n x_n)]^\gamma =$$

$$[\lambda \text{mín}(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n)]^\gamma =$$

$$\lambda^\gamma [\text{mín}(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n)]^\gamma =$$

$$\lambda^\gamma f(\mathbf{x})$$

Elasticidad a escala = γ

Demostración:

$$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} \frac{(t)}{f(tx)}$$

$$\begin{aligned}
f(tx) &= t^\gamma f(x) \\
\frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} &= \gamma t^{\gamma-1} f(x) \\
e(x) &= \gamma t^{\gamma-1} f(x) \frac{(t)}{t^\gamma f(x)} = \gamma
\end{aligned}$$

Elasticidad de sustitución=0

Demostración:

Puesto que la $TMST$ es $-\infty$, entonces $\sigma = 0$.

Ahora para la solución a el problema se debe tener en cuenta que en el óptimo $a_1x_1 = a_2x_2 = \dots = a_nx_n$, por ende $y = (a_ix_i)^\gamma$ y entonces $x_i = \frac{y^{1/\gamma}}{a_i}$, que son las demandas condicionadas.

- b) Para encontrar la demanda condicionada de los factores de debe resolver el problema mín wx s.a. $y \leq f(x_1, \dots, x_n)$, esto se planteando el lagrangeano, derivando con respecto a cada factor, dejando todos los factores en terminos de uno solo (cualquiera), reemplazando estas ecuaciones en la restriccion y despejando. Para los siguientes casos unicamente vamos a plantear la solución por brevedad.

$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n a_ix_i \right)^\gamma \text{ con } \gamma > 0, \forall j a_j, x_j \in \mathbb{R}_+$$

$$TMST_{x_ix_j} = \frac{a_i}{a_j}$$

Demostración:

$$TMST_{x_ix_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{x_i}{x_j}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} = \frac{\gamma (\sum a_n x_n)^{\gamma-1} a_i}{\gamma (\sum a_n x_n)^{\gamma-1} a_j} = \frac{a_i}{a_j}$$

Homogeneidad= γ

Demostración:

$$f(\lambda x) = (\sum \lambda a_n x_n)^\gamma = (\lambda \sum a_n x_n)^\gamma = \lambda^\gamma (\sum a_n x_n)^\gamma = \lambda^\gamma f(x)$$

Elasticidad a escala= γ

Demostración:

$$\begin{aligned}
e(x) &= \frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} \frac{(t)}{f(tx)} \\
f(tx) &= t^\gamma f(x) \\
\frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} &= \gamma t^{\gamma-1} f(x) \\
e(x) &= \gamma t^{\gamma-1} f(x) \frac{(t)}{t^\gamma f(x)} = \gamma
\end{aligned}$$

Elasticidad de sustitución= ∞

Demostración:

Puesto que la $TMST$ es constante, entonces tenemos $\sigma = \frac{\partial(\frac{x_j}{x_i})}{\partial TMST} = \infty$.

Demanda condicionada: Ver la solución al ultimo punto.

$$c) f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^\rho \right)^{\frac{\gamma}{\rho}} \text{ con } \gamma, \rho > 0, \forall j, x_j \in \mathbb{R}_+$$

$$TMST_{x_i x_j} = \frac{a_i x_i^{\rho-1}}{a_j x_j^{\rho-1}}$$

Demostración:

$$TMST_{x_i x_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{x_i}}{\frac{\partial f(x)}{x_j}} = \frac{\frac{\gamma}{\rho} (\sum a_n x_n^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}-1} \rho a_i x_i^{\rho-1}}{\frac{\gamma}{\rho} (\sum a_n x_n^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}-1} \rho a_j x_j^{\rho-1}} = \frac{a_i x_i^{\rho-1}}{a_j x_j^{\rho-1}}$$

Homogeneidad= γ

Demostración:

$$f(\lambda x) = (\sum a_i (\lambda x_i)^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = (\lambda^\rho \sum a_i x_i^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = (\lambda^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} (\sum a_i x_i^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = \lambda^\gamma f(x)$$

Elasticidad a escala= γ

Demostración:

$$\begin{aligned} e(x) &= \frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} \frac{(t)}{f(tx)} \\ f(tx) &= t^\gamma f(x) \\ \frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} &= \gamma t^{\gamma-1} f(x) \\ e(x) &= \gamma t^{\gamma-1} f(x) \frac{(t)}{t^\gamma f(x)} = \gamma \end{aligned}$$

Elasticidad de sustitución= $\frac{1}{1-\rho}$

Demostración:

Puesto que la $TMST = \frac{a_i x_i^{\rho-1}}{a_j x_j^{\rho-1}}$ entonces:

$$\begin{aligned} dTMST &= d \ln(a_i x_i^{\rho-1}) - d \ln(a_j x_j^{\rho-1}) = d \ln(a_i) + d \ln(x_i^{\rho-1}) - \\ & d \ln(a_j) - d \ln(x_j^{\rho-1}) = d(\rho-1) \ln(x_i) - d(\rho-1) \ln(x_j) = (\rho- \\ & 1) \frac{dx_i}{x_i} - (\rho-1) \frac{dx_j}{x_j} \end{aligned}$$

$$d(\ln(\frac{x_j}{x_i})) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$$

Entonces:

$$\sigma = \frac{-(\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j})}{(\rho-1)(\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j})} = \frac{1}{1-\rho}$$

Demanda condicionada: Se tiene que $TMST_{x_i x_j} = \frac{a_i x_i^{\rho-1}}{a_j x_j^{\rho-1}} = \frac{w_i}{w_j}$

de donde se puede deducir que $x_i = \left(\frac{w_i a_j}{w_j a_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} x_j$, de donde

se deduce que $q = \sum a_i \left(\frac{w_i a_j}{w_j a_i}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} x_j^\rho$, de donde se deduce que:

$q^{\frac{1}{\rho}} = x_j \left(\frac{a_j}{w_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \sum a_i \left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}$ de donde se deduce que:

$$x_j = \frac{q^{\frac{1}{\rho}}}{\left(\frac{a_j}{w_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\sum a_i \left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

d) $f(\mathbf{x}) = A \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ con $A > 0, \forall j \alpha_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

$$TMST_{x_i x_j} = \frac{a_i x_j}{a_j x_i}$$

Demostración:

$$TMST_{x_i x_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{x_i}}{\frac{\partial f(x)}{x_j}} = \frac{A \prod x_n^{\alpha_n} \frac{\alpha_i}{x_i}}{A \prod x_n^{\alpha_n} \frac{\alpha_j}{x_j}} = \frac{a_i x_j}{a_j x_i}$$

Homogeneidad = $\sum \alpha_i$

Demostración:

$$f(\lambda x) = A \prod (\lambda x_i)^{\alpha_i} = \lambda^{\sum \alpha_i} A \prod (x_i)^{\alpha_i} = \lambda^{\sum \alpha_i} f(x)$$

Elasticidad a escala = $\sum \alpha_i$

Demostración:

$$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial t} \frac{t}{f(tx)}$$

$$f(tx) = t^{\sum \alpha_i} f(x)$$

$$\frac{\partial f(tx)}{\partial t} = \sum \alpha_i t^{\sum \alpha_i - 1} f(x)$$

$$e(x) = \sum \alpha_i t^{\sum \alpha_i - 1} f(x) \frac{t}{t^{\sum \alpha_i} f(x)} = \sum \alpha_i$$

Elasticidad de sustitución = 1

Demostración:

Puesto que la $TMST = \frac{a_i x_j}{a_j x_i}$ entonces:

$$dTMST = d \ln(a_i x_j) - d \ln(a_j x_i) = d \ln(a_i) + d \ln(x_j) - d \ln(a_j) -$$

$$d \ln(x_i) = d \ln(x_j) - d \ln(x_i) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$$

$$d \ln\left(\frac{x_j}{x_i}\right) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$$

Entonces:

$$\sigma = \frac{\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j}}{\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j}} = 1$$

Demanda condicionada: Se tiene que $\frac{a_i x_j}{a_j x_i} = \frac{w_i}{w_j}$ de donde se puede deducir que

$$x_j = \left(\frac{q}{A \prod \left(\frac{a_i}{w_i} \right)^{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\sum \alpha_i}} \frac{a_j}{w_j}$$

4. Definiendo la elasticidad a escala cómo $e(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{x}{f(x)}$, muestre con las funciones de producción del punto anterior que $e(x)$ es exactamente el grado de homogeneidad de la función. (hágalo para cada función de producción). Demuestre además que $\frac{CMe}{Cmg} = e(x)$.

En las notas de clase se encuentran ambas demostraciones. En cualquier caso el del grado de homogeneidad igual a $e(x)$ se encuentra en el punto anterior.

5. Verifique que las demandas condicionadas encontradas en el punto 1 cumplen con las tres propiedades enunciadas en las notas de clase. (1. $x(w; y)$ será homogénea de grado 0 en w , 2. Aumentos en los precios de los insumos no aumentarán la demanda de los insumos lo que quiere decir que para cualquier 3. Existen efectos simétricos en las demandas)
6. Dada la siguiente función de costos $\min(w_1, w_2, \dots, w_n)y$

- a) Halle la función de producción

La función de costos $\min(w_1, w_2, \dots, w_n)y$ implica que se produce con el insumo mas barato, es decir que el empresario se enfrenta a una función de producción de sustitutos perfectos donde $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$, donde utiliza el insumo k -esimo si: $\frac{\beta_k}{w_k} < \frac{\beta_i}{w_i} \forall i \neq k$

- b) Encuentre las demandas condicionadas de factores $x_k = \frac{y}{\beta_k} x_i = 0 \forall i \neq k$

- c) Encuentre la función de beneficios y la oferta. $\Pi = p\beta_k x_k - w_k x_k = x_k(p\beta_k - w_k)$ Si $p\beta_k - w_k > 0$ entonces se demanda infinito de x_k , se obtienen infinitos beneficios, y se oferta infinito de y . Si $p\beta_k - w_k = 0$ entonces se demanda cualquier cantidad de x_k , se obtienen beneficios cero, y se oferta cualquier cantidad de y . Si $p\beta_k - w_k < 0$ entonces no se demanda x_k , y no se oferta del bien y .