Universidad de Los Andes
Microeconomía III
Taller 3

Miguel Espinosa y Mauricio Romero

1. Un trabajador representativo tiene una función de utilidad dada por

$$U(x, c) = \sqrt{c} - x$$

donde $x$ son las horas de trabajo y $c$ su consumo. Su salario es de $w$ y los precios son normalizados a $p = 1$. El gobierno desea recaudar ingresos mediante un impuesto al ingreso laboral del trabajador.

(a) Si el gobierno pone un impuesto de suma fija $T$ sobre los ingresos salariales, evalúe cómo cambia la oferta laboral del individuo, es decir el número de horas que ofrece a un salario dado. **En este caso, la restricción presupuestal del individuo es $xw - T \geq c$. Esta restricción es activa, por lo tanto, podemos reemplazar $c = xw - T$. El problema del individuo se vuelve**

$$\max_x \sqrt{xw - T} - x$$

**que es un problema bien definido. La CPO es**

$$\frac{w}{2\sqrt{xw - T}} - 1 = 0.$$

**Despejando $x$, hallamos $x = \frac{w}{4} + \frac{T}{w}$. Por lo tanto, el impuesto de suma fija aumenta la oferta laboral, pues $\frac{\partial x}{\partial T} = \frac{1}{w} > 0$.**

(b) Si el impuesto es proporcional al ingreso, de modo que el trabajador sólo recibe una fracción de $(1 - t)$ de su ingreso salarial, evalúe el efecto sobre la oferta laboral. **En este caso, la restricción presupuestal del individuo es $xw(1 - t) \geq c$. De**

**nuevo, esta restricción es activa y podemos reemplazar $c = xw(1-t)$. El problema del individuo se vuelve**

$$\max_x \sqrt{xw(1-t)} - x$$

**que es de nuevo, un problema bien definido. La CPO es**

$$\frac{w(1-t)}{2\sqrt{xw(1-t)}} - 1 = 0.$$

**Despejando $x$, hallamos $x = \frac{w(1-t)}{4}$. En este caso, cuando aumenta $t$ y el impuesto se vuelve más "pesado", el trabajador destina menos horas a su trabajo pues $\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{w}{4} < 0$.**

(c) Si se sabe que la demanda laboral es independiente del impuesto, ¿qué efectos tendrán ambos impuestos sobre el equilibrio en el mercado laboral? ¿Tendrá esto algún efecto sobre la producción? **Supongamos que el capital de la firma que contrata trabajadores se encuentra fijo. El primer tipo de impuesto desplaza la curva de oferta laboral hacia arriba, esto aumenta el número de horas de trabajo contratadas y disminuye el salario real por hora. En este caso el producto aumenta por haber más trabajo. En el segundo caso la oferta se desplaza hacia abajo, aumentando el salario real y disminuyendo el número de horas contratadas. La producción se verá disminuida.**

(d) Hallar para el literal b) la tasa $t$ que maximiza el recaudo. **El recaudo será $xwt = \frac{w^2(1-t)t}{4}$. Luego su maximización es equivalente a maximizar $t(1-t) = t - t^2$, cuya CPO es $1 - 2t = 0$ y obtenemos $t = \frac{1}{2}$.**

2. Un joven estudiante de micro III deriva utilidad de su consumo, pero entiende que su estudio le permitirá mayores niveles de consumo futuro y no le molesta estudiar. Por lo tanto su utilidad está dada por:

$$U(x, e) = \ln x + \beta \ln e$$

donde x es su consumo, e las horas dedicadas a la educación por día y $\beta \ln e$ es la utilidad descontada por impaciencia de los futuros niveles de consumo que le permitirán $e$ horas de estudio.

El tiempo que el joven no dedica a estudiar lo usa para trabajar recibiendo un salario de $w$ por hora. Adicional a ese salario, sus padres le ayudan con una transferencia de dinero por un monto fijo de $I$ que el joven usa para consumir $x$ unidades de consumo a un precio de $p$ cada una.

(a) Halle las horas que el estudiante dedicará al estudio y su consumo. Muestre las condiciones para que la solución sea interior, es decir $0 < e^* < 24$. Calcule cómo varía $e^*$ cuando aumenta $\beta, I$ y $w$, explicando la intuición de estos resultados.

Hay solución interior si y sólo si los parámetros $\beta, I, w$ satisfacen que $\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{I}{w}+24\right) < 24$, de lo contrario $e^* = 24$, pues $e^* > 0$ sin importar los parámetros.

Tenemos que $\frac{\partial e^*}{\partial \beta} > 0$, que quiere decir que ha medida que el peso relativo de la educación en la utilidad aumenta, el individuo se preocupa más por educarse y dedicará más tiempo a esta actividad.

Tenemos que $\frac{\partial e^*}{\partial I} > 0$, que quiere decir que entre mayor sea la transferencia de los padres, menor serán los retornos de unidades extras de consumo y por lo tanto, disminuirá el incentivo a ubicar más horas a trabajar.

Tenemos que $\frac{\partial e^*}{\partial w} < 0$, que quiere decir que entre mayor sea el costo de oportunidad de estudiar (que es trabajar) menos tiempo se destina al estudio. **La restricción presupuestal del individuo es $px \leq I + w(24-e)$, que es activa, luego puede reemplazarse por la igualdad. El problema del individuo es**

$$\max \ln x + \beta \ln e \ \texttt{sujeto a:} \quad px \leq I + w(24-e).$$

**El lagrangeano del problema es**

$$L = \ln x + \beta \ln e - \lambda(px - I - w(24-e))$$

**y las CPO son**

$$\frac{1}{x} - \lambda p = 0$$

$$\frac{\beta}{e} - \lambda w = 0$$

**y**

$$px - I - w(24-e) = 0$$

**Resolviendo estas ecuaciones para $x, e, \lambda$, hallamos** [1]**:**

$$x^* = \frac{I + 24w}{p(1+\beta)}$$

$$e^* = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{I}{w} + 24\right)$$

**y**

$$\lambda^* = \frac{1+\beta}{I + 24w}$$

**Hay solución interior si y sólo si los parámetros $\beta, I, w$ satisfacen que $\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{I}{w} + 24\right) < 24$, de lo contrario $e^* = 24$, pues $e^* > 0$ sin importar los parámetros.**

**Tenemos que $\frac{\partial e^*}{\partial \beta} > 0$, que quiere decir que ha medida que el peso relativo de la educación en la utilidad aumenta, el individuo se preocupa más por educarse y dedicará más tiempo a esta actividad.**

**Tenemos que $\frac{\partial e^*}{\partial I} > 0$, que quiere decir que entre mayor sea la transferencia de los padres, menor serán los retornos de unidades extras de consumo y por lo tanto, disminuirá el incentivo a ubicar más horas a trabajar.**

**Tenemos que $\frac{\partial e^*}{\partial w} < 0$, que quiere decir que entre mayor sea el costo de oportunidad de estudiar (que es trabajar) menos tiempo se destina al estudio.**

(b) **¿Qué sucede cuando $\beta \to 0$ y $\beta \to \infty$?**

**Cuando $\beta \to \infty$, obtenemos $e^* = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{I}{w} + 24\right) \to \left(\frac{I}{w} + 24\right) > 24$. Luego, sin importar $I$ y $w$, cuando las preferencias relativas por la educación son altas, el individuo tenderá a educarse las 24 horas.Cuando $\beta \to 0$, obtenemos $e^* = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{I}{w} + 24\right) \to 0$. Entonces, si la utilidad relativa de la educación tiende a cero, el individuo tenderá a no educarse.**

**Cuando $\beta \to \infty$, obtenemos $e^* = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{I}{w} + 24\right) \to \left(\frac{I}{w} + 24\right) > 24$. Luego, sin importar $I$ y $w$, cuando las preferencias relativas por la educación son altas, el individuo tenderá a educarse las 24 horas.**

[1] En este caso, hallamos $x$ y $e$ en términos de $\lambda$ y lo reemplazamos en la restricción presupuestal, obteniendo una ecuación para $\lambda$.

(c) **Los padres del joven, preocupados por su rendimiento deciden ponerle un límite a sus recursos consumidos $p\overline{x}$, ¿qué debe cumplir este límite para que el joven aumente sus horas de estudio?**

**Para que la restricción sea activa se debe cumplir que $x^* = \frac{I+24w}{(1+\beta)} \geq p\overline{x}$. En este caso, el individuo selecciona $x = \overline{x}$ y sus horas de estudio de acuerdo a**

$$p\overline{x} = I + w(24 - e)$$

**de donde obtenemos $e = \frac{I+24w-p\overline{x}}{w} > 0$ y vemos que, entre menor sea $\overline{x}$, mayor será el número de horas destinadas al estudio.**

3. Verdadero o Falso. Justifique su respuesta.

- Si un monopsonio de mercado laboral enfrenta una curva de oferta creciente el gasto marginal del insumo es igual al precio del insumo.

**Primero note que el gasto marginal del insumo es $\frac{\partial w(l)l}{\partial l} = \frac{\partial w(l)}{\partial l}l + w(l)$. La respuesta es entonces falsa. En el caso de competencia perfecta el salario no depende de la fuerza laboral contratada (es decir $\frac{\partial w(l)}{\partial l} = 0$ por lo que el gastomarginal de contratar una unidad adicional de trabajo es simplemente el salario del mercado. En el caso del moposonio, dado que el salario depende de la cantidad de gente contratada, si la curva de oferta es positiva quiere decir que $\frac{\partial w(l)}{\partial l}$ es positivo, por lo que el gasto marginal en el insumo sera mayor que su precio.**

4. Un consumidor que vive $T$ periodos enfrenta la siguiente función de utilidad:

$$U(c_1, c_2, ..., c_T) = \sum_{i=1}^{T} \phi_i \frac{c_i^{1-\theta}}{1-\theta}$$

(a) Interprete la función de utilidad en los siguientes escenarios:

i. $\phi_i = 1 \ \forall i$
**Le da la misma importancia al consumo en cada uno de los T periodos**

ii. $\phi_i = \beta^{i-1}$ $\forall i$ y $\beta \in (0,1)$
**Le da más importancia al presente que al futuro**

iii. $\phi_i = \beta^{i-1}$ $\forall i$ y $\beta > 1$
**Le da más importancia al futuro que al presenta**

iv. $\phi_1 = 1$ y $\phi_i = 0$ para $i \neq 1$
**Solo le importa el consumo hoy.**

Suponga que se cumple la segunda situacion ($\phi_i = \beta^{i-1}$ $\forall i$ y $\beta \in (0,1)$) con T=2. Además, suponga que el individuo recibe un ingreso $I_1$ en el primer periodo y otro $I_2$ en el segundo, con la posibilidad de ahorrar o endeudarse en el primer periodo.

(b) Derive una expresión para la restricción presupuestal si el individuo enfrenta una tasa de interés r.

$$\sum \frac{c_i}{(1+r)^{i-1}} \leq \sum \frac{I_i}{(1+r)^{i-1}}$$

**La restricción es que el valor presente de los consumos no debe ser mayor al valor presente de los ingresos. Es decir:**

$$\sum \frac{c_i}{(1+r)^{i-1}} \leq \sum \frac{I_i}{(1+r)^{i-1}}$$

**(c) Plantee el problema de optimización**
**El lagrangeano es**

$$L = \frac{c_1^{1-\theta}}{1-\theta} + \beta \frac{c_2^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda(c_1 + \frac{c_1}{1+r} - I_1 - \frac{I_2}{1+r})$$

**(d) De las condiciones de primer orden del problema de optimización usted encontrará una ecuación $C_1$ en función de los términos $C_2$, $r$, $\beta$. Esta expresión se conoce como la ecuación de Euler. Dé una interpretación para esta expresión.**

$$c_1 = c_2[(1+r)\beta]^{\frac{1}{\theta}}$$

(e) **Encuentre los niveles de $C_1$ y $C_2$ óptimos.**

$$c_2 = \frac{I_2 + I_1(1+r)}{(1 + (\beta + r\beta)^{\frac{1}{\theta}}(1+r))}$$

$$c_1 = \frac{I_2 + I_1(1+r)}{(1 + (\beta + r\beta)^{\frac{1}{\theta}}(1+r))}[(1+r)\beta]^{\frac{1}{\theta}}$$

(f) **¿Qué sucede si la tasa de interés sube? Descomponga el cambio en efecto sustitución y efecto ingreso.**

**Si el consumidor es un ahorrador, el aumento en $r$ lo beneficia, lo que tiende a aumentar su consumo en ambos periodos (Efecto Ingreso). Pero, el aumento en $r$ eleva el costo de oportunidad del consumo en el primer periodo, por lo que disminuye $c_1$ y aumenta $c_2$ (efecto sustitución).**

(g) **¿Qué sucede si el término $\beta$ se incrementa?**

**Consume más en 2 que en 1.**

(h) **¿Qué sucede si $I_1$ se reduce?**

**Reduce el consumo en ambos periodos**

5. Considere una economía de intercambio con dos agentes Alicia y Beto. En esta economía se consumen dos bienes $X$ y $Y$, de los que Alicia posee $A_x$ y $A_y$ y Beto $B_x$ y $B_y$. Alicia y Beto deciden intercambiar entre ellos ambos bienes a precios $P_X$ y $P_Y$ respectivamente y su utilidad es de la forma $U_i = \ln X_i + \ln Y_i$.

   (a) Halle la curva de contrato (todas las asignaciones pareto eficientes posibles bajo intercambio).

   El lagrangeano del problema es

   $$L = \ln X_A + \ln Y_A - \lambda_1(\ln X_B + \ln Y_B - \overline{U_B}) - \lambda_2(X_A + X_B - X) - \lambda_3(Y_A + Y_B - Y)$$

   las CPO (distintas a las restricciones) son

   $$\frac{1}{X_A} = \lambda_2, \frac{1}{Y_A} = \lambda_3, \frac{\lambda_1}{X_B} = \lambda_2, \frac{\lambda_1}{Y_B} = \lambda_3.$$

   De aquí se deduce que

   $$\frac{X_B}{Y_B} = \frac{X_A}{Y_A} = \frac{X}{Y}.$$

Esto caracteriza a las asignaciones pareto eficientes. La curva de contrato es entonces la recta que une las dos esquinas opuestas de la C.E.**Las asignaciones pareto eficientes están dadas por las soluciones al problema**

$$\max_{X_A, X_B, Y_A, Y_B} \ln X_A + \ln Y_A \ \texttt{Sujeto a:} \quad \ln X_B + \ln Y_B = \overline{U_B}, X_A + X_B = X, Y_A + Y_B = Y$$

**donde X y Y son las dotaciones de los bienes.**
**El lagrangeano del problema es**

$$L = \ln X_A + \ln Y_A - \lambda_1(\ln X_B + \ln Y_B - \overline{U_B}) - \lambda_2(X_A + X_B - X) - \lambda_3(Y_A + Y_B - Y)$$

**las CPO (distintas a las restricciones) son**

$$\frac{1}{X_A} = \lambda_2, \frac{1}{Y_A} = \lambda_3, \frac{\lambda_1}{X_B} = \lambda_2, \frac{\lambda_1}{Y_B} = \lambda_3.$$

**De aquí se deduce que**

$$\frac{X_B}{Y_B} = \frac{X_A}{Y_A} = \frac{X}{Y}.$$

**Esto caracteriza a las asignaciones pareto eficientes. La curva de contrato es entonces la recta que une las dos esquinas opuestas de la C.E.**

(b) **Encuentre las funciones de demanda del bien $X$ y $Y$ por parte de Alicia y Beto. El problema de Alicia es**

$$\max_{X_A, Y_A} \ln X_A + \ln Y_A \ \texttt{Sujeto a:} \quad P_X X_A + P_Y Y_A = P_X A_x + P_Y A_y.$$

**El lagrangeano del problema es**

$$L = \ln X_A + \ln Y_A - \lambda(P_X X_A + P_Y Y_A - P_X A_x - P_Y A_y)$$

**y las CPO además de las restricciones son**

$$\frac{1}{X_A} = \lambda P_X, \frac{1}{Y_A} = \lambda P_Y.$$

**Reemplazando en la restricción todo en términos de $\lambda$, obtenemos**

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2}$$

**y**

$$X_A = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_X}, Y_A = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_Y}.$$

**Análogamente**

$$X_B = \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_X}, Y_B = \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_Y}.$$

(c) **Encuentre las funciones de exceso de demanda $Z_X(P_X, P_Y)$ y $Z_Y(P_X, P_Y)$ y pruebe que son homogéneas de grado cero en los precios, continuas y que cumplen la ley de Walras.**

$$\begin{aligned} & Z_X(tP_X, tP_Y) = \\ \frac{tP_X A_x + tP_Y A_y}{2tP_X} + \frac{tP_X B_x + tP_Y B_y}{2tP_X} & - A_x - B_x = \\ \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_X} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_X} & - A_x - B_x = \\ & t^0 Z_X(P_X, P_Y) \end{aligned}$$

**Tenemos que**

**lo que prueba la homogeneidad de grado 0.**

**La continuidad puede ser verificada para $P, X, P_Y > 0$, pues los denominadores están bien definidos.**

**La ley de Walras se verifica también, pues**

$$\begin{aligned} & P_X Z_X(P_X, P_Y) + P_Y Z_Y(P_X, P_Y) = \\ \frac{P_X A_x + P_y A_y}{2} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2} & - P_X A_x - P_x B_x + \\ \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2} & - P_Y A_y - P_Y B_y = 0. \end{aligned}$$

**Tenemos que**

$$Z_X(P_X, P_Y) = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_X} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_X} - A_x - B_x$$

**y**

$$Z_Y(P_X, P_Y) = \frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_Y} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_Y} - A_y - B_y.$$

$$
\begin{aligned}
&Z_X(tP_X, tP_Y) = \\
&\frac{tP_X A_x + tP_Y A_y}{2tP_X} + \frac{tP_X B_x + tP_Y B_y}{2tP_X} - A_x - B_x = \\
&\frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2P_X} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2P_X} - A_x - B_x = \\
&t^0 Z_X(P_X, P_Y)
\end{aligned}
$$

**Tenemos que**
**lo que prueba la homogeneidad de grado 0.**
**La continuidad puede ser verificada para** $P, X, P_Y > 0$**,** **pues los denominadores están bien definidos.**
**La ley de Walras se verifica también, pues**

$$
\begin{aligned}
&P_X Z_X(P_X, P_Y) + P_Y Z_Y(P_X, P_Y) = \\
&\frac{P_X A_x + P_y A_y}{2} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2} - P_X A_x - P_x B_x + \\
&\frac{P_X A_x + P_Y A_y}{2} + \frac{P_X B_x + P_Y B_y}{2} - P_Y A_y - P_Y B_y = 0.
\end{aligned}
$$

(d) **Encuentre los precios relativos** $p = P_X/P_Y$ **de equilibrio. Demuestre que a estos precios, se obtiene una asignación de recursos que cae sobre la curva de contrato.**
**Sabemos que se cumple que**

$$\frac{X_A}{Y_A} = \frac{X_B}{Y_B} = TMS = \frac{P_Y}{P_X} = \frac{X}{Y}$$

**que quiere decir que la asignación es pareto eficiente. Por la ley de Walras es suficiente resolver**

$$Z_X(P_X, P_Y) = 0.$$

**Esto es equivalente a**

$$p = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y}{X}$$

**que son los precios relativos de equilibrio.**
**Sabemos que se cumple que**

$$\frac{X_A}{Y_A} = \frac{X_B}{Y_B} = TMS = \frac{P_Y}{P_X} = \frac{X}{Y}$$

**que quiere decir que la asignación es pareto eficiente.**

(e) **Suponga que un planeador social quiere reasignar las dotaciones iniciales de modo que al final, el resultado del mercado sea el mismo para Alicia y Beto (es decir queden con iguales cantidades de ambos bienes). ¿Puede lograr el planeador este fin?. Si es posible, halle todas las asignaciones de dotaciones iniciales que lo logran.**

**Debemos ver que dotaciones iniciales arrojan esta asignación del mercado.**

**Con las dotaciones dadas y los precios de equilibrio, obtenemos:**

$$X_A = \frac{A_x}{2} + \frac{A_y X}{2Y}, X_B = \frac{B_x}{2} + \frac{B_y X}{2Y}$$

**Se debe cumplir entonces que**

$$A_x Y + A_y X = B_x Y + B_y X$$

**que es equivalente a**

$$(A_x, A_y) = (B_x, B_y).$$

**Estas son las dotaciones iniciales que dan como resultado del mercado una asignación igualitaria. Esta asignación es posible como resultado del intercambio únicamente si es pareto óptima. Sin embargo, esta asignación cumple que**

$$\frac{X_A}{Y_A} = \frac{X_B}{Y_B} = \frac{X}{Y}$$

**y es eficiente.**

**Debemos ver que dotaciones iniciales arrojan esta asignación del mercado.**

**Con las dotaciones dadas y los precios de equilibrio, obtenemos:**

$$X_A = \frac{A_x}{2} + \frac{A_y X}{2Y}, X_B = \frac{B_x}{2} + \frac{B_y X}{2Y}$$

**Se debe cumplir entonces que**

$$A_x Y + A_y X = B_x Y + B_y X$$

**que es equivalente a**

$$(A_x, A_y) = (B_x, B_y).$$

**Estas son las dotaciones iniciales que dan como resultado del mercado una asignación igualitaria.**

6. Considere una economia de intercambio con dos consumidores (A y B), y funciones de utilidad $u_A = x_{1A} - \frac{1}{8}x_{2A}^{-8}$ y $u_B = x_{2B} - \frac{1}{8}x_{1B}^{-8}$. Suponga que las dotaciones iniciales son $e_A = (2, r)$ y $e_B = (r, 2)$.

   (a) Caracterice el conjunto de asignaciones Pareto eficiente. Grafíquelo.

$$TSMT^A = \frac{1}{x_{2A}^{-9}}$$

$$TSMT^B = \frac{x_{1B}^{-9}}{1}$$

Igualando las tasas marginales de sustitución:

$$\frac{1}{x_{2A}^{-9}} = \frac{x_{1B}^{-9}}{1}$$

Elevando a la 9

$$\frac{1}{x_{2A}} = \frac{x_{1B}}{1}$$

Teniendo en cuenta que $x_{1B}+x_{1A} = 2+r$ y que $x_{2B}+x_{2A} = 2+r$, se tiene que:

$$x_{2A} = \frac{1}{2 + r - X_{1A}}$$

**Primero se encuentra la $TSMT^i = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_1}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_2}}$ donde $i = \{A, B\}$.**

$$TSMT^A = \frac{1}{x_{2A}^{-9}}$$

$$TSMT^B = \frac{x_{1B}^{-9}}{1}$$

**Igualando las tasas marginales de sustitución:**

$$\frac{1}{x_{2A}^{-9}} = \frac{x_{1B}^{-9}}{1}$$

**Elevando a la** 9

$$\frac{1}{x_{2A}} = \frac{x_{1B}}{1}$$

**Teniendo en cuenta que** $x_{1B}+x_{1A} = 2+r$ **y que** $x_{2B}+x_{2A} = 2 + r$**, se tiene que:**

$$x_{2A} = \frac{1}{2 + r - X_{1A}}$$

(b) **Encuentre el equilibrio walrasiano (Aquí encontraré que existe más de un equilibrio, es decir que el equilibrio no es único. De hecho, Arrow demostró que las condiciones para que el equilibrio sea único son extremas: Que todos los agentes tengan funciones de utilidad Cobb-Douglas). Pista: use $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$ y prueben que las relaciones de precios $p = \{2, 1, 1/2\}$, son todas de equilibrio.**

**El problema de A es**

$$\max_{x_{1A}, x_{2A}} x_{1A} - \frac{1}{8} x_{2A}^{-8} \quad \texttt{Sujeto a:} \quad P_1 X_{1A} + P_2 X_{2A} = 2P_1 + rP_2.$$

**El lagrangeano del problema es**

$$L = x_{1A} - \frac{1}{8} x_{2A}^{-8} - \lambda(P_1 X_{1A} + P_2 X_{2A} - 2P_1 + rP_2)$$

**De donde se puede deducir que:**

$$x_{2A}^{*} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/9} = p^{\frac{1}{9}}$$

$$x_{1A}^{*} = \frac{2P_1 + rP_2 - P_2 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/9}}{P_1} = 2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}}$$

**De manera análoga:**

$$x_{1B}^{*} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1/9} = p^{\frac{-1}{9}}$$

$$x_{2B}^{*} = \frac{2P_2 + rP_1 - P_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1/9}}{P_2} = 2 + rp - p^{\frac{8}{9}}$$

**De donde sale que (debido a que $x_{1B} + x_{1A} = 2 + r$):**

$$2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}} + p^{\frac{-1}{9}} = 2 + r$$

**Como se puede comprobar $p = \{2, 1, 1/2\}$ son soluciones a la ecuación cuando $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$. Graficando la función:**

$$f(p) = 2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}} + p^{\frac{-1}{9}} - 2 - r$$

**se puede comprobar.**

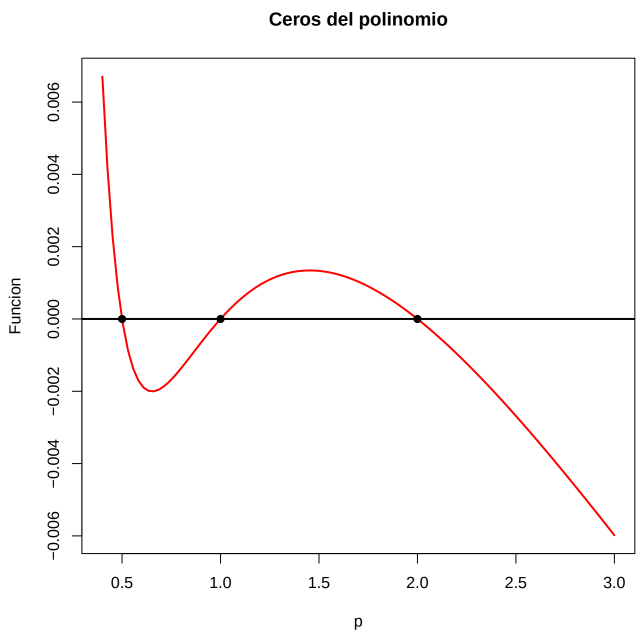


Figure 1: f(p)

(c) **Verifique que estas asignaciones pertenecen al conjunto de asignaciones Pareto eficiente.**
**Quisiéramos ver cuándo:**

$$p^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2 + \frac{r}{p} - p^{\frac{-8}{9}}}$$

**Graficando la función** $g(p) = p^{\frac{1}{9}} - \frac{1}{2+\frac{r}{p}-p^{\frac{-8}{9}}}$ **vemos que tiene raíces en** $p = \{2, 1, 1/2\}$**.**

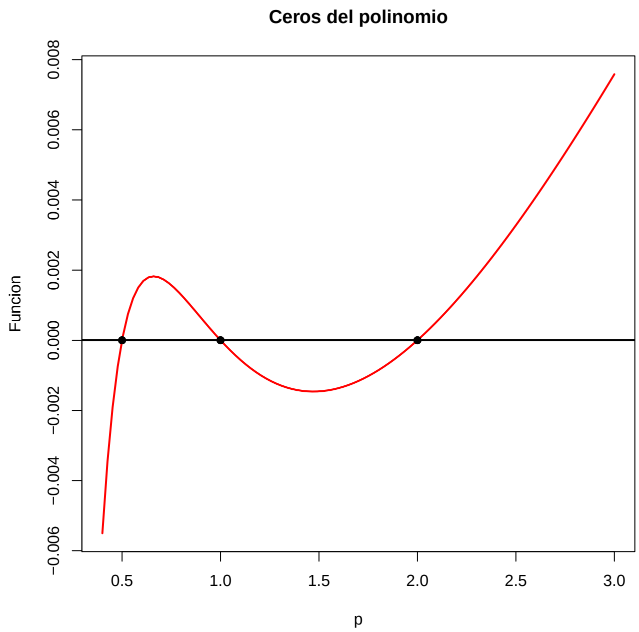
Ceros del polinomio
Funcion
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
−0.002
−0.004
−0.006
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
p

Figure 2: g(p)