Universidad de Los Andes
Microeconomía III
Parcial 1

Mauricio Romero y Gabriela González

Junio 14 de 2016

1. **[5 ptos]** Yo solamente consumo pizza y cerveza. Que tendría un mayor efecto en la cantidad de pizza que consumo: a) Doblar el precio de la cerveza, o b) reducir mi ingreso en la mitad, y el precio de la pizza en la mitad.

   Daria lo mismo. Note que la restricción en el primer caso es $2P_cC + P_pP = I$ y en el segundo caso sería $P_cC + \frac{1}{2}P_p = \frac{I}{2}$. La primera ecuación no es nada diferente que dos veces la segunda. Por ende la restriccion presupuestal es la misma en ambos casos, y el efecto sobre el consumo de pizza debe ser el mismo.

2. **[5 ptos]** $u(x)$ representa las preferencias de un consumidor sobre $\mathbb{R}^n$. En cada caso, diga si $f(x)$ también representa las preferencias del consumidor. En cada caso, argumente su respuesta con una prueba o un contra-ejemplo.

   a) **[2.5 ptos]** $f(x) = u(x) + (u(x))^3$
   Si pues sea $x \succeq y$, entonces $u(x) \geq u(y)$. Como $g(x) = x^3$ es una función creciente, entonces $u(x)^3 \geq u(y)^3$, entonces $u(x) + (u(x))^3 \geq u(y) + (u(y))^3$

   b) **[2.5 ptos]** $f(x) = u(x) - e^{u(x)}$
   No sea $x \succeq y$, entonces $10 = u(x) \geq u(y) = 1$. Note que $f(x) < f(y)$ entonces f no representa las mismas preferencias

3. **[5 ptos]** Suponga que un consumidor compra x_i a precios p_i. Para las partes a/b por aparte, indique si las siguientes elecciones satisfacen WARP

   a) **[2.5 ptos]** $p_0 = (1, 6)$, $x_0 = (10, 5)$; $p_1 = (3, 5)$, $x_1 = (8, 4)$.
   Si. Note que $p_0x_0 = 40$,$p_0x_1 = 32$,$p_1x_0 = 55$,$p_1x_1 = 44$. A los precios p_0 elegí x_0 pero también podía comprar x_1. A los precios p_1 compro x_1 y ya no me alcanza para x_0.

   b) **[2.5 ptos]** $p_0 = (4, 1)$, $x_0 = (1, 3)$; $p_1 = (2, 2)$, $x_1 = (2, 4)$.
   Si. Note que $p_0x_0 = 7$,$p_0x_1 = 12$,$p_1x_0 = 8$,$p_1x_1 = 12$. A los precios p_1 compro x_1, y puedo costear x_0. A los precios p_0, compro x_0 y ya no me alcanza para x_1.

4. **[5 ptos]** Sea $F(x)$ una función de producción con rendimientos constantes a escala, donde $x = (x_1, ..., x_n)$ para $n \geq 1$. Muestre que la función de producción se puede escribir como la suma ponderada de sus productividades marginales.

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)x_i.$$

donde $F_i(x) := \frac{\partial F}{\partial x_i}$.

Sabemos que

$$F(\lambda x) = F((\lambda x_1, ..., \lambda x_n)) = \lambda F(x)$$

derivando con respecto a lambda a ambos lados

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x)\lambda x_i = F(x)$$

y como esto es verdad para todo λ, es verdad para $\lambda = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x)x_i = F(x)$$

5. **[10 ptos]** Suponga que un individuo tiene preferencias lexicograficas sobre canastas en $\mathbb{R}^2$. Suponga que el precio del primer bien (p_1) incrementa. Describa el efecto ingreso y el efecto sustitución.

   Por la forma de las preferencias un individuo gasta todo su ingreso en el primer bien. Es decir $x_1 = \frac{I}{P_1}$ y $x_2 = 0$. Por ende no hay efecto sustitución en ningún de los dos bienes, y no hay efecto ingreso en el segundo bien. El efecto ingreso en el primer bien sería igual a $-\frac{\partial x_1}{\partial I}x_1 = -\frac{1}{P_1}x_1$, es decir el consumo del primer bien cae por cuenta del efecto ingreso en una cantidad igual a $\frac{1}{P_1}x_1$ si el precio del bien se incrementa en una unidad.

6. **[10 ptos]** Mi función de utilidad $U(x, y)$ es estrictamente creciente en cada bien, y satisface que la tasa marginal de sustitución es decreciente. Tenemos que $TMS(5, 5) = -2$. ¿Cuál es el ranking (que se refiere a que) de las canastas (4,6) y (6,3)?

   Note que esto quiere decir que las canastas $(4, 7)$, $(6, 3)$ y $(6, 6)$ me hacen igual de feliz. Por ende la canasta $(4, 6)$ que tiene menos del segundo bien que la canasta $(4, 7)$ debe ser peor (pues mi utilidad es estrictamente creciente) que la canasta $(4, 6)$ y por ende es peor que la canasta $(6, 3)$. En resumen $(6, 4) \succeq (4, 7)$.

7. **[10 ptos]** Sea $X_i(p, y)$ la demanda marshaliana de un agente. Defina $\eta_i = \frac{\partial X_i(p,y)}{\partial y}\frac{y}{X_i(p,y)}$ como la elasticidad ingreso de la demanda y $s_i = \frac{p_i X_i(p,y)}{y}$ como la fracción del ingreso que se gasta en el bien i. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} s_i\eta_i = 1$. (Pista: Recuerde $y = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(p, y)$)

   Derive $y = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(p, y)$ con respecto a y a ambos lados. Obtiene

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p, y)}{\partial y}$$

   y multiplicando y diviendo por lo mismo

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p, y)}{\partial y} \frac{x_i(p, y)}{x_i(p, y)} \frac{y}{y}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(p, y)p_i}{y} \frac{\partial x_i(p, y)}{\partial y} \frac{y}{x_i(p, y)}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} s_i\eta_i$$

8. **[25 ptos]** Suponga que Robinson tiene preferencias Leontief con respecto a los cocos (C) y el ocio (R),

$$u(C,R) = \text{mín}\{C,R\}.$$

Suponga que Robinson no tiene dotación inicial de cocos, pero tiene una dotación inicial de tiempo de $T > 0$ horas.

La firma usa las horas de trabajo de Robinson para producir cocos que vende a un precio p, y lo compensa con un salario de w por hora trabajada. Suponga que la función de producción tiene retornos decrecientes a escala,

$$F(l) = l^{\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \in (0,1).$$

a) **[5 ptos]** Encuentre la demanda no condicional de trabajo. *La firma maximiza beneficios, es decir* $\text{máx}_l\, pl^{\alpha} - wl$ *De aqui se tiene que*

$$l^d = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

b) **[5 ptos]** Encuentre la escala óptima de producción de la firma.

$$c^o = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

y las ganancias serian

$$\pi(w,p) = p\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\pi(w,p) = w\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

c) **[5 ptos]** Escriba la restricción presupuestal de Robinson y encuentre su demanda no condicionadas (Marshallianas) por cocos C^* y por ocio R^*.

La restriccion presupuesta seria

$\pi(w,p) + wT = Rw + pC$

Sabemos que el maximiza su utilidad cuando $R = C$ *entonces*

$\frac{\pi(w,p)+wT}{w+p} = R^d = C^d$

d) **[5 ptos]** Escriba la ecuación que define el equilibrio competitivo. Pueden normalizar el precio de los cocos a $p = 1$.

Seria una de las dos ecuaciones de exceso de demanda. Por ejemplo

$$R^d + l^d = T$$

$$\frac{\pi(w,p) + wT}{w+p} + \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = T$$

o

$$C^d = C^o$$

$$\frac{\pi(w,p) + wT}{w+p} = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Note que no tocaba hacer nada más. Pero si quieren se puede resolver y tenemos

$$\frac{\pi(w,p)+wT}{w+1}+\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=T$$

$$\pi(w,p)+wT+w\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=wT+T$$

$$w\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\alpha}+w\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=T$$

$$w\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=T$$

$$\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{w}{\alpha}+1\right)=T$$

El precio(s) de equilibrio es cualquier w que solución esta ecuación.

e) **[5 ptos]** Diga cúales son las asignaciónes óptimo de Pareto. Es el equilibrio un óptimo de Pareto?

Para encontrar las asignaciones optimas de Pareto hay varias opciones. Una es asumir que hay un planificador central que maximiza: $\max_l U(R,C)$
s.t.
$R+L=T$
$C=L^\alpha$
entonces ya sabemos que $R=C$ cuando se maximiza. Por ende $R=C=L^\alpha$ y $L^\alpha+L=T$
Todas las L que satisfacen esta ecuación son óptimos de Pareto.
Claro que el óptimo es un óptimo de Pareto (por el primer teorema del bienestar). Para verificarlo note que la demanda de la firma en equilibrio es:

$$l^d=\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

y por ende para que sea un óptimo de Pareto necesitamos:

$$\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}+\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=T$$

que es la misma condición de arriba que tenemos para encontrar el salario de equilibrio.

9. **[10 ptos]** Demuestre el primer teorema del bienestar. Es decir, demuestre que si $\overline{x}$ es un equilibrio walrasiano entonces $\overline{x}$ es un óptimo de Pareto. Puede suponer que no hay producción en esta economía. (Pista: Hagalo por contradicción).

   Mirar notas de clase.

10. **[15 ptos]** Suponga que el mercado de apuestas sobre el ganador de la Copa América es perfectamente competitivo. Sea p el precio de una apuesta que paga 1 si Colombia gana la Copa América. Sea q el precio de una apuesta que paga 1 si Colombia pierde la Copa América. El Cole, un firme fan de la selección Colombia, cree que la probabilidad de que Colombia gane es 90 %. Donal, "El pato", Trump cree firmemente que la probabilidad de que Colombia gane es 10 %. Ambos tienen 10,000 activos o apuestan que pagan cuando Colombia gana, y 10,000 activos o apuestan que pagan cuando Colombia pierde. La utilidad de cada uno es $U^i(w_g,w_p)=p_g^i\ln(w_g^i)+p_p^i\ln(w_p^i)$ donde p_g^i es la probabilidad que i le asigna a que Colombia gane, y w_g^i es su riqueza en ese momento. De manera similar p_p^i representa la probabilidad de que Colombia pierda y w_p^i si riqueza en ese caso.

a) **[5 ptos]** Demuestre que $q = 1 - p$ (Pista: no puede haber arbitraje) *Cree un activo cero riesgo. Este activo puede estar conformado por una apuesta de que Colombia gane, y una de que Colombia pierda. Este activo retorna* 1 *en el futuro, sin importar que, y me cuesta* $p+q$. *Las ganancias de comprar este activo son* $1-p-q$. *Dado que las ganancias tienen que ser cero para que no haya arbitraje entonces*

$$p = 1 - q$$

b) **[5 ptos]** Encuentre p de equilibrio *Cada persona maximiza*

$$\max_{A_g, A_p} p_g^i \ln(w_g^i) + p_p^i \ln(w_p^i)$$

s.t.

$$A_g p + A_p(1-p) = 1000p + 1000(1-p) = 10000$$

$$A_g = w_g$$

$$A_p = w_p$$

entonces de las condiciones de primer orden tenemos:

$$\frac{p_g^i}{p w_g^i} = \frac{p_p^i}{(1-p) w_p^i}$$

De aquí tenemos que

$$A_p = w_p^i = \frac{p_p^i p w_g^i}{(1-p) p_g^i}$$

Y reemplazando en la restricción presupuestal

$$A_g p + \frac{p_p^i p w_g^i}{p_g^i}) = 1000$$

De donde deducimos que

$$A_g^i = \frac{1000}{p\left(1 + \frac{p_p^i}{p_g^i}\right)}$$

Por ende

$$A_g^{cole} = \frac{1000}{p\left(1 + \frac{0{,}1}{0{,}9}\right)}$$

$$A_g^{trump} = \frac{1000}{p\left(1 + \frac{0{,}9}{0{,}1}\right)}$$

Y sabemos que en equilibrio

$$A_g^{cole} + A_g^{trump} = 20,000$$

de donde deducimos que: $p = 0{,}5$

c) **[5 ptos]** Encuentre las apuestas que ambos realizan en equilibrio

$$A_g^{cole} = 18000$$
$$A_g^{trump} = 2000$$

$$A_p^{cole} = 2000$$
$$A_p^{trump} = 18000$$