Universidad de Los Andes
Microeconomía III
Solución Taller 1

Mauricio Romero y Gabriela González

Junio de 2016

1. Ejercicio 9 - Partes 1,2,3 4,7 de las notas de clase de Alvaro Riascos

2. Encuentre la demanda marshaliana, la demanda hicksiana, la función de utilidad indirecta, la función de gasto, y diga si los bienes son normales o inferiores para las siguientes funciones de utilidad:

   Las demandas marshallianas serán aquellas que solucionen el problema: $\max U(x_1, x_2, x_3)$ s.a. $I = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3$.

   a) $U(x_1, x_2) = e^{\min(x_1, x_2+2x_3)}$

Transformando la función, tenemos:

$\tilde{U} = \min(x_1, x_2 + 2x_3)$

Note que se trata de una relación de complementos perfectos y no se puede resolver derivando. Ahora, usando la transformación sabemos que en el óptimo: $x_1 = x_2 + 2x_3$

Adicionalmente, x_2 y x_3 tienen relación de sustitutos perfectos, de manera que el individuo consumirá el que tenga un precio relativo más bajo: Consumirá $x_1 = x_2$ si $P_2 < \frac{P_3}{2}$ y $x_1 = x_3$ si $P_2 > \frac{P_3}{2}$. En caso de que $P_2 = \frac{P_3}{2}$, el individuo será indiferente a consumir cualquier combinación de $x_2 y 2x_3$ bienes, de manera que $x_1 = 2_2 + 2x_3$. Para encontrar las demandas, es necesario hacer el análisis de cada uno de los tres casos por separado. Para cada uno se reemplaza la condición de óptimo en la restricción presupuestal y se despejan los tres bienes en función de los precios y el ingreso (I).

En cualquier caso, se encuentra que los tres bienes son normales, pues $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} \geq 0$.

Demandas hicksianas, función de utilidad indirecta, función de gasto: Ver la solución en el último punto.

b) $U(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 2\min(x_2, x_3))$

Transformando la función, tenemos:
$\tilde{U} = x_1 + 2\min(x_2 + x_3)$

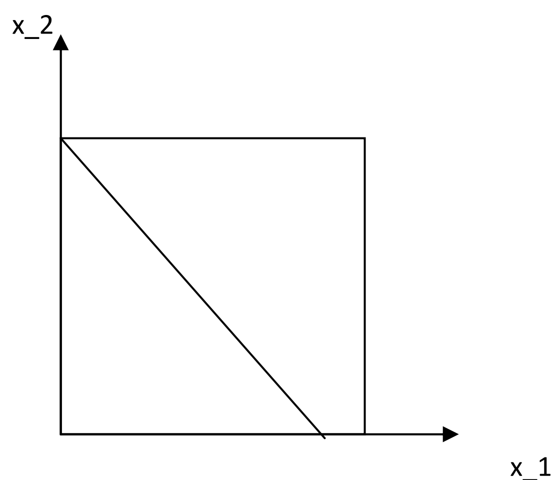
Note que en este caso tampoco es posible resolverlo a través de un lagrangiano. El bien x_1 tiene una relación de sustitutos perfectos con la combinación de x_2 y x_3. Sea $\bar{P} \equiv P_2 + P_3$. Esto es lo que le cuesta al individuo aumentar $\tilde{U}$ a través de consumir una combinación de x_2 y x_3. Su consumo óptimo dependerá entonces de la relación entre P_1 y $\frac{\bar{P}}{2}$. Si $P_1 < \frac{\bar{P}}{2}$, consumirá únicamente x_1, si $P_1 > \frac{\bar{P}}{2}$, consumirá únicamente x_2 y x_3, con $x_2^* = x_3^*$. Finalmente, si $P_1 = \frac{\bar{P}}{2}$, el individuo será indiferente entre consumir cualquier combinación de x_1 y x_2, x_3, cumpliendo $x_2^* = x_3^*$.

El análisis debe hacerse para cada uno de los tres casos por separado, al igual que en el ejercicio anterior.

De la misma manera, una vez se encuentran las demandas óptimas, se concluye que los bienes son normales ($\frac{\partial x_i^*}{\partial I} \geq 0$).

c) $U(x_1, x_2) = \max(x_1, 3x_2)$

No se puede plantear lagrangiano por que no es continua la funcion y por que no es concava. Se hace una solución "gráfica".



d) $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$

En este caso se plantea el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + \lambda(I - P_1 x_1 - P_2 x_2)$$

Sacando las CPO, encontramos que en el óptimo: $x_2 = x_1(\frac{P_1}{P_2})(\frac{1-\alpha}{\alpha})$
Reemplazando en la restricción, tenemos: $x_1^* = \frac{\alpha I}{P_1}$ y $x_2^* = \frac{(1-\alpha)I}{P_2}$, que son las demandas

marshallianas.

Reemplazando estas demandas en la función de utilidad, obtenemos la función de utilidad indirecta:

$V(P_1, P_2, I) = U(x_1^*, x_2^*) = I(\frac{\alpha}{P_1})^{\alpha}(\frac{1-\alpha}{P_2})^{1-\alpha}$

Despejando el ingreso en esta ecuación, reemplazando $V(.)$ por $\bar{U}$ y reemplazándolo en las demandas marshallianas, encontramos las demandas hicksianas:

$x_1^h = \bar{U}(\frac{P_1(1-\alpha)}{\alpha P_2})^{\alpha}$ y $x_2^h = \bar{U}(\frac{P_2\alpha}{(a-\alpha)P_1})^{1-\alpha}$

A partir de las demandas hicksianas podemos encontrar la función de gasto:

$e(P_1, P_2, \bar{U}) = P_1 x_1^h + P_2 x_2^h = \bar{U} P_1^{\alpha} P_2^{1-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\alpha^{-\alpha}$
Finalmente, decimos que los bienes son normales, ya que:

$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{\alpha}{P_1}$

3. Para las funciones de producción: Para cada función encuentre la $TMST_{x_i x_j}$, el grado de homogeneidad, rendimientos a escala, la elasticidad de sustitución, la función de beneficio, la función de oferta, la demanda condicional de factores y la demanda no condicional de factores.

   Para encontrar la demanda no condicionada de los factores, la funcion de oferta y la funcion de beneficios, lo haremos más adelante. Lo unico que deben tener en cuenta por ahora es que la firma desea maximizar beneficios ($\Pi = py - wx$), por endecuando la función de producción posee rendimientos constantes o crecientes a escala, esto es cuando su grado de homogeneidad no es inferior a 1, la firma puede llegar a obtener beneficios "infinitos", pues si aumenta el uso de sus insumos, aumenta su producción más que proporcionalmente (o proporcionalmente) y por ende puede obtener mayor beneficios. Esto implicaria que no hay solución al problema primal de la firma.

   a) $f(\mathbf{x}) = [\text{mín}(a_1 x_1, a_2 x_2, ..., a_n x_n)]^{\gamma}$ con $\gamma > 0$, $\forall j$ $a_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

   $TMST_{x_i x_j} = -\infty$
   Demostración:
   No esta bien definida pues la función no es derivable, sin embargo intiutivamente es $-\infty$

   Homogeneidad$=\gamma$
   Demostración:
   $f(\lambda\mathbf{x}) = [\text{mín}(\lambda a_1 x_1, \lambda a_2 x_2, ..., \lambda a_n x_n)]^{\gamma} =$
   $[\lambda \,\text{mín}(a_1 x_1, a_2 x_2, ..., a_n x_n)]^{\gamma} =$
   $\lambda^{\gamma}[\text{mín}(a_1 x_1, a_2 x_2, ..., a_n x_n)]^{\gamma} =$
   $\lambda^{\gamma} f(x)$

   Elasticidad a escala$=\gamma$
   Demostración:

$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} \frac{(t)}{f(tx)}$
$f(tx) = t^{\gamma} f(x)$
$\frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} = \gamma t^{\gamma - 1} f(x)$
$e(x) = \gamma t^{\gamma - 1} f(x) \frac{(t)}{t^{\gamma} f(x)} = \gamma$

Elasticidad de sustitución=0
Demostración:
Puesto que la $TMST$ es $-\infty$, entonces $\sigma = 0$.

Ahora para la solución a el problema se debe tener en cuenta que en el óptimo $a_1 x_1 = a_2 x_2 = ... = a_3 x_3$, por ende $y = (a_i x_i)^{\gamma}$ y entonces $x_i = \frac{y^{1/\gamma}}{a_i}$, que son las demandas condicionadas.

b) Para encontrar la demanda condicionada de los factores de debe resolver el problema $\min wx$ s.a. $y \leq f(x_1, ..., x_n)$, esto se planteando el lagrangeano, derivando con respecto a cada factor, dejando todos los factores en terminos de uno solo (cualquiera), reemplazando estas ecuaciones en la restriccion y despejando. Para los siguientes casos unicamento vamos a plantear la solución por brevedad.
$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)^{\gamma}$ con $\gamma > 0$, $\forall j$ $a_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

$TMST_{x_i x_j} = \frac{a_i}{a_j}$
Demostración:
$TMST_{x_i x_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{x_i}}{\frac{\partial f(x)}{x_j}} = \frac{\gamma(\sum a_n x_n)^{\gamma - 1} a_i}{\gamma(\sum a_n x_n)^{\gamma - 1} a_j} = \frac{a_i}{a_j}$

Homogeneidad=γ
Demostración:
$f(\lambda x) = (\sum \lambda a_n x_n)^{\gamma} = (\lambda \sum a_n x_n)^{\gamma} = \lambda^{\gamma} (\sum a_n x_n)^{\gamma} = \lambda^{\gamma} f(x)$

Elasticidad a escala=γ
Demostración:
$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} \frac{(t)}{f(tx)}$
$f(tx) = t^{\gamma} f(x)$
$\frac{\partial f(tx)}{\partial (t)} = \gamma t^{\gamma - 1} f(x)$
$e(x) = \gamma t^{\gamma - 1} f(x) \frac{(t)}{t^{\gamma} f(x)} = \gamma$

Elasticidad de sustitución=∞
Demostración:
Puesto que la $TMST$ es constante, entonces tenemos $\sigma = \frac{\partial (\frac{x_j}{x_i})}{\partial TMST} = \infty$.

Demanda condicionada: Ver la solución al ultimo punto.

c) $f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{\rho} \right)^{\frac{\gamma}{\rho}}$ con $\gamma, \rho > 0, \forall j$ $a_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

$TMST_{x_ix_j} = \frac{a_ix_i^{\rho-1}}{a_jx_j^{\rho-1}}$
Demostración:
$TMST_{x_ix_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{x_i}}{\frac{\partial f(x)}{x_j}} = \frac{\frac{\gamma}{\rho}(\sum a_nx_n^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}-1}\rho a_ix_i^{\rho-1}}{\frac{\gamma}{\rho}(\sum a_nx_n^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}-1}\rho a_jx_j^{\rho-1}} = \frac{a_ix_i^{\rho-1}}{a_jx_j^{\rho-1}}$

Homogeneidad$=\gamma$
Demostración:
$f(\lambda x) = (\sum a_i(\lambda x_i)^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = (\lambda^\rho \sum a_ix_i^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = (\lambda^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}}(\sum a_ix_i^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}} = \lambda^\gamma f(x)$

Elasticidad a escala$=\gamma$
Demostración:
$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial(t)}\frac{(t)}{f(tx)}$
$f(tx) = t^\gamma f(x)$
$\frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} = \gamma t^{\gamma-1}f(x)$
$e(x) = \gamma t^{\gamma-1}f(x)\frac{(t)}{t^\gamma f(x)} = \gamma$

Elasticidad de sustitución$=\frac{1}{1-\rho}$
Demostración:
Puesto que la $TMST = \frac{a_ix_i^{\rho-1}}{a_jx_j^{\rho-1}}$ entonces:
$dTMST = dln(a_ix_i^{\rho-1}) - dln(a_jx_j^{\rho-1}) = dln(a_i) + dln(x_i^{\rho-1}) - dln(a_j) - dln(x_j^{\rho-1}) = d(\rho-1)ln(x_i) - d(\rho-1)ln(x_j) = (\rho-1)\frac{dx_i}{x_i} - (\rho-1)\frac{dx_j}{x_j}$

$d(ln(\frac{x_j}{x_i})) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$
Entonces:
$\sigma = \frac{-(\frac{dx_i}{x_i}-\frac{dx_j}{x_j})}{(\rho-1)(\frac{dx_i}{x_i}-\frac{dx_j}{x_j})} = \frac{1}{1-\rho}$

Demanda condicionada: Se tiene que $TMST_{x_ix_j} = \frac{a_ix_i^{\rho-1}}{a_jx_j^{\rho-1}} = \frac{w_i}{w_j}$ de donde se puede deducir que $x_i = \left(\frac{w_i}{w_j}\frac{a_j}{a_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} x_j$, de donde se deduce que $q = \sum a_i \left(\frac{w_i}{w_j}\frac{a_j}{a_i}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} x_j^\rho$, de donde se deduce que: $q^{\frac{1}{\gamma}} = x_j \left(\frac{a_j}{w_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \sum a_i \left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}$ de donde se deduce que:

$$x_j = \frac{q^{\frac{1}{\gamma}}}{\left(\frac{a_j}{w_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\sum a_i\left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

d) $f(\mathbf{x}) = A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ con $A > 0$, $\forall j\ \alpha_j, x_j \in \mathbb{R}_+$

$TMST_{x_ix_j} = \frac{a_ix_j}{a_jx_i}$
Demostración:

$$TMST_{x_ix_j} = \frac{\frac{\partial f(x)}{x_i}}{\frac{\partial f(x)}{x_j}} = \frac{A\prod x_n^{\alpha_n}\frac{\alpha_i}{x_i}}{A\prod x_n^{\alpha_n}\frac{\alpha_j}{x_j}} = \frac{a_ix_j}{a_jx_i}$$

Homogeneidad$=\sum \alpha_i$

Demostración:

$f(\lambda x) = A\prod(\lambda x_i)^{\alpha_i} = \lambda^{\sum \alpha_i} A\prod(x_i)^{\alpha_i} = \lambda^{\sum \alpha_i} f(x)$

Elasticidad a escala$=\sum \alpha_i$

Demostración:

$e(x) = \frac{\partial f(tx)}{\partial(t)}\frac{(t)}{f(tx)}$

$f(tx) = t^{\sum \alpha_i} f(x)$

$\frac{\partial f(tx)}{\partial(t)} = \sum \alpha_i t^{\sum \alpha_i - 1} f(x)$

$e(x) = \sum \alpha_i t^{\sum \alpha_i - 1} f(x)\frac{(t)}{t^{\sum \alpha_i} f(x)} = \sum \alpha_i$

Elasticidad de sustitución$=1$

Demostración:

Puesto que la $TMST = \frac{a_ix_j}{a_jx_i}$ entonces:

$dTMST = dln(a_ix_j) - dln(a_jx_i) = dln(a_i) + dln(x_j) - dln(a_j) - dln(x_i) = dln(x_j) - dln(x_i) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$

$d(ln(\frac{x_j}{x_i})) = \frac{dx_j}{x_j} - \frac{dx_i}{x_i}$

Entonces:

$\sigma = \frac{\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j}}{\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j}} = 1$

Demanda condicionada: Se tiene que $\frac{a_ix_j}{a_jx_i} = \frac{w_i}{w_j}$ de donde se puede deducir que

$$x_j = \left(\frac{q}{A\prod\left(\frac{a_i}{w_i}\right)^{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\sum \alpha_i}} \frac{a_j}{w_j}$$

4. Definiendo la elasticidad a escala cómo $e(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{f(x)}$, muestre con las funciones de producción del punto anterior que e (x) es exactamente el grado de homogeneidad de la función.(hágalo para cada función de producción). Demuestre además que $\frac{CMe}{Cmg} = e(x)$.

   El grado de homogeneidad igual a $e(x)$ se encuentra en el punto anterior.