Punto 1

$$C_f(s,a) = s^2 + (p-a)^2 \rightarrow \text{fundidora}$$

$$C_L(r,a) = r^2 + a^2 \rightarrow \text{lavandería}$$

a. Problema de la fundidora:

$$\max_{s,a} \quad \Pi_f = P_s \cdot s - \left[s^2 + (p-a)^2\right]$$

CPO: $\frac{\partial \Pi_f}{\partial s} = P_s - 2s = 0 \Rightarrow \boxed{s^* = \frac{P_s}{2}}$

$$\frac{\partial \Pi_f}{\partial a} = -2(p-a)(-1) = 0$$

$$\cancel{2}p = \cancel{2}a \Rightarrow \boxed{a^* = p}$$

$$\Pi_f = P_s\left(\frac{P_s}{2}\right) - \left[\left(\frac{P_s}{2}\right)^2 + 0\right] = \frac{P_s^2}{2} - \frac{P_s^2}{4} = \frac{2P_s^2 - P_s^2}{4} = \frac{P_s^2}{4} \Rightarrow \boxed{\Pi_f^* = \frac{P_s^2}{4}}$$

Problema de la lavandería:

$$\max_{r} \quad \Pi_L = P_r r - r^2 - a^2$$

CPO: $\frac{\partial \Pi_L}{\partial r} = P_r - 2r = 0 \Rightarrow \boxed{r^* = \frac{P_r}{2}}$

$$\Pi_L^* = P_r\left(\frac{P_r}{2}\right) - \left(\frac{P_r}{2}\right)^2 - p^2 \Rightarrow \boxed{\Pi_L^* = \frac{P_r^2}{4} - p^2}$$

b. Problema del dueño de la nueva firma unida:

$$\max_{r,s,a} \quad \Pi_T = P_s s + P_r r - s^2 - (p-a)^2 - r^2 - a^2$$

CPO: $\frac{\partial \Pi_T}{\partial r} = 0 \Rightarrow P_r - 2r = 0 \Rightarrow \boxed{r^* = \frac{P_r}{2}}$

$\frac{\partial \Pi_T}{\partial s} = 0 \Rightarrow P_s - 2s = 0 \Rightarrow \boxed{s^* = \frac{P_s}{2}}$

$\frac{\partial \Pi_T}{\partial a} = 0 \Rightarrow -2(p-a)(-1) - 2a = 0 \Rightarrow 2a = p - a$

$3a = p \Rightarrow \boxed{a^* = \frac{p}{3}}$

$$\Pi_f^P = P_s\left(\frac{P_s}{2}\right) - \left(\frac{P_s}{2}\right)^2 - \left(P - \frac{P}{3}\right)^2$$

$$= \frac{P_s^2}{4} - \left(\frac{2P}{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\Pi_f^P = \frac{P_s^2}{4} - \frac{4P^2}{9}}$$

$$\Pi_L^P = P_r\left(\frac{P_r}{2}\right) - \left(\frac{P_r}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^2$$

$$\boxed{\Pi_L^P = \frac{P_r^2}{4} - \frac{P^2}{9}}$$

$$\Pi_T = \frac{P_s^2}{4} - \frac{4P^2}{9} + \frac{P_r^2}{4} - \frac{P^2}{9} \Rightarrow \Pi_T^P = \frac{1}{4}(P_s^2 + P_r^2) - \frac{5P^2}{9}$$

c. S. $\Pi_T^P = \frac{1}{4}(P_s^2 + P_r^2) - \frac{5P^2}{9}$ vs. $\Pi_T^* = \Pi_f^* + \Pi_L^*$

$$\Pi_T^* = \frac{P_s^2}{4} + \frac{P_r^2}{4} - P^2$$

$$\Pi_T^* = \frac{1}{4}(P_s^2 + P_r^2) - P^2$$

óptimo competitivo.

Pérdida bienestar $= \Pi_T^P - \Pi_T^*$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{4}(P_s^2 + P_r^2)} - \frac{5P^2}{9} - \cancel{\frac{1}{4}(P_s^2 + P_r^2)} + P^2 = \nabla^- \text{bienestar.}$$

$$\nabla^- = P^2\left(1 - \frac{5}{9}\right) \Rightarrow \nabla^- = \frac{9-5}{9} \Rightarrow \boxed{\nabla^- = \frac{4}{9}}$$

$\Rightarrow$ Pérdida de bienestar en el caso competitivo.

$$\Pi_T^P > \Pi_T^*.$$

d. Costos fundidora con impuesto:

$$C_f(s, a) = s^2 + (P-a)^2 + \tau a$$

τ^* debe ser tal que $a^* = \frac{P}{3}$

$$\Rightarrow \max \ \Pi_f = P_s S - S^2 + (P-a)^2 - \tau a$$

CPO: $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -2(P-a)(-1) - \tau = 0 \Rightarrow \tau = 2(P-a) \Rightarrow a = P - \frac{\tau}{2}$

$$\Rightarrow \tau = 2\left(P - \frac{P}{3}\right) \Rightarrow \tau = 2\left(\frac{2P}{3}\right) \Rightarrow \tau = \frac{4P}{3}$$

$$a^* = \frac{2P - \tau}{2} \Rightarrow a^* = P - \frac{4P}{6} \Rightarrow a^* = P\left(\frac{6-4}{6}\right) \Rightarrow a = \frac{P}{3}$$

$\Rightarrow$ El nivel óptimo de impuesto será $\tau^* = \frac{4P}{3}$

e. Derechos de propiedad de aire puro: lavandería:

P_a: precio de cada unidad de polución.

- lavandería optimiza en el punto que BMg polución es igual a CMg polución.

CMg_L polución $= 2a$

BMg polución $= P_a$ $\Rightarrow$ (i) $2a = P_a$

- Fundidora optimiza cuando BMg polución = CMg polución.

CMg polución $= P_a$

BMg polución: $\underbrace{\frac{\partial C_f(s,a)}{\partial a}}_{\text{Cuánto reduce el costo si aumenta 1 unidad de } a.} = 2(P-a)(-1) \Rightarrow -2P+a$ } Disminuye Cf en $\underline{2(P-a)}$

$P_a = 2(P-a)$ (ii)

$\Rightarrow$ Igualando (i) y (ii): $2a = 2(P-a)$

$\Rightarrow 4a = 2P \Rightarrow \boxed{a = \frac{P}{2}}$

y $\boxed{P_a = P}$

f. Derechos de propiedad a las fundidoras:

P_c: bonos de contaminación.

Para la fundidora:

$\underbrace{2(P-a)}_{\text{Costo Mg de no polvir.}} = \underbrace{P_c}_{\text{Beneficio Mg de no poluir}}$

Para la lavandería:

$\underbrace{2a}_{\text{beneficio Mg del aire limpio.}} = \underbrace{P_c}_{\text{Lo costo del aire limpio (Mg)}}$

$\Rightarrow 2(P-a) = 2a \Rightarrow a = \frac{2P}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{P}{2}}$, $\boxed{P_c = P}$

El precio del bono sería igual al precio de la polución en el punto anterior. El nivel de contaminación de equilibrio también sería el mismo.

El gobierno podría asignar los derechos a cualquiera y tendrá el mismo efecto para la sociedad. La diferencia está en que el dueño de los derechos recibirá un pago, mientras que el otro deberá pagar.

Punto 2

a. Ambas firmas se fusionan:

Problema de nueva firma:

$$\max_{h} \ \Pi_T = \Pi_A + \Pi_B$$

$$\max_{h} \ ah^{1/2} - h + bh^{1/2}$$

CPO: $\frac{\partial \Pi_T}{\partial h} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}ah^{-1/2} - 1 + \frac{1}{2}bh^{-1/2} = 0$

$$\frac{1}{2}h^{-1/2}(a+b) = 1 \quad \Rightarrow \quad h^{1/2} = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\boxed{h^a = \frac{(a+b)^2}{4}} \rightarrow \text{Nivel de desarrollo.}$$

$$\Pi_T = a\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} - \frac{(a+b)^2}{4} + b\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$\Pi_T = \frac{a+b}{2}(a+b) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Pi_T = \frac{2(a+b)^2 - (a+b)^2}{4} \Rightarrow \boxed{\Pi_T = \frac{(a+b)^2}{4}} \rightarrow \text{Ganancias agregadas.}$$

b. Subsidio a A-soft.

$$\max_{h} \ \Pi_A = ah^{1/2} - h + h\tau$$

CPO: $\frac{\partial \Pi_A}{\partial h} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}ah^{-1/2} - 1 + \tau = 0$

$$\Rightarrow 1 - \tau = \frac{1}{2}ah^{-1/2}$$

$$h^{1/2}(1-\tau) = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{a}{2(1-\tau)}\right)^2$$

y h^* debe ser igual a $\frac{(a+b)^2}{4}$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2(1-\tau)}\right)^2 \Rightarrow (a+b)(1-\tau) = a$$

$$\cancel{a} + b - \tau(a+b) = \cancel{a}$$

$$\tau(a+b) = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{b}{a+b}}$$

Con el subsidio de $\tau = \frac{b}{a+b}$:

Problema de A-soft: $\max_{h} \quad ah^{1/2} - h + \frac{b}{a+b}h$

CPO: $\frac{\partial \Pi_A}{\partial h} = \frac{1}{2}ah^{-1/2} - 1 + \frac{b}{a+b} = 0$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)\frac{2}{a} = h^{-1/2}$$

$$h^{-1/2} = \left(\frac{a+\cancel{b}-\cancel{b}}{a+b}\right)\frac{2}{\cancel{a}}$$

$$h^{-1/2} = \frac{2}{a+b} \Rightarrow \boxed{h^{b} = \frac{(a+b)^2}{4}}$$ → Nivel de dllo de equilibrio con el subsidio.

C. A-soft es dueña del desarrollo tecnológico.
P: precio por unidad usada de h.

$\Pi_A = ah^{1/2} - h + ph$

$\Pi_B = bh^{1/2} - ph$

A venderá tecnología a un precio tal que: BMg de h sea igual a CMg h.

$$\Rightarrow \underbrace{p + \frac{1}{2}ah^{-1/2}}_{BMg} = \underbrace{1}_{CMg} \quad (i) \qquad \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{2}ah^{-1/2}$$

B hará lo mismo, pero comprará h.

$$p = \frac{1}{2}bh^{-1/2} \quad (ii)$$

⇒ Igualando (i) y (ii): $\frac{1}{2}bh^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}ah^{-1/2}$

$$1 = \frac{1}{2}h^{-1/2}(a+b) \Rightarrow h^{1/2} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \boxed{h^{c} = \frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$y \quad p = \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} \Rightarrow p = \frac{1}{2}\cdot b\,\frac{(a+b)}{2}$$

$$\boxed{p = \frac{b(a+b)}{4}}$$

d) La situación constituye una externalidad porque las decisiones de inversión en desarrollo de A-Soft tienen un efecto sobre el beneficio de B-ing, el cual no es internalizado por el mercado. Es una externalidad positiva porque a mayor desarrollo en A-Soft, mayor beneficio para Bing. Sin embargo, A-Soft no tiene esto en cuenta en su función de beneficios. Por lo tanto en la solución privada se producirá un nivel de desarrollo (h) menor al socialmente óptimo.

Resolviendo el problema privado:

$$\max_{h} \; a h^{1/2} - h$$

CPO: $\frac{d\Pi}{dh} = \frac{1}{2} a h^{-1/2} - 1 = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} a h^{-1/2}$

$$\Rightarrow \boxed{h^p = \frac{a^2}{4}} \rightarrow \text{solución privada.}$$

Podemos ver que

$$h^p < \underbrace{h^a}_{\text{solución con fusión}} = \underbrace{h^b}_{\text{Soluc. con } t.} = \underbrace{h^c}_{\text{Sol. con dchos de prop.}}$$

$\Rightarrow$ Todas las soluciones logran internalizar la externalidad positiva y producir más nivel de desarrollo que el de la solución privada.

Punto 3

Sea t_1: tiempo de viaje en ruta 1 y t_2 tiempo de viaje en ruta 2.

a. $C = 5$

$$\Rightarrow t_2 = 5 + \frac{T_2}{5}$$
$$t_1 = 15$$

Las personas elegirán 1 hasta el punto en que

$$t_2 = 15 \Rightarrow 15 = 5 + \frac{T_2}{5} \Rightarrow T_2 = 50$$

Para $T_2 = 50$, $t_2 = 5 + \frac{50}{5} = 15 \Rightarrow$ Ambas rutas se demoran lo mismo.

Si $T_2 = 51 \Rightarrow t_2 = 5 + \frac{51}{5} = 15.2 \Rightarrow$ Entonces la persona # 51 ya no preferiría la ruta 2, sino la 1.

R/ En equilibrio, 50 personas elegirán la ruta 2 y el tiempo de viaje será de 15 minutos.

b. La gente elige la ruta 2 siempre que $t_2 \leq t_1$.
Siempre que $t_2 \geq 15$, las personas preferirán ruta 1.
Para que el tiempo de viaje sea menor a 15, todas las personas deben poder elegir ruta 2 y se cumplirá que: $t_2 < 15$

$$5 + \frac{T_2}{C} < 15 \quad , \quad \text{con } T_2 = 100$$

$$10 > \frac{T_2}{C} \Rightarrow C > \frac{100}{10} \Rightarrow \boxed{C > 10} \rightarrow \text{Para que } t_2 < 15'.$$

Para cualquier $C \leq 10$, el equilibrio será tal que el tiempo de viaje sea 15' por ambas rutas y la gente se reparta entre ambas. Por lo tanto, se debe hacer una ampliación tal que todas las personas puedan usar la ruta 2 y esta siga siendo más rápida que la 1.

c. Si el gobierno desea mejorar el bienestar social, debe aumentar la capacidad (C) de la vía 2 a $C>10$. Si no se puede hacer $C>10$, lo mejor que puede hacer el gobierno es no invertir en esta vía, pues esto no reducirá el tiempo de viaje y dará lo mismo que todos transiten por la vía 1.

Punto 4

a. Reducción óptima:

Será tal que $CMg(Q_a) = BMg(Q_T) = CMg(Q_b)$

$\Rightarrow CMg(Q_a) = BMg(Q_T) \Rightarrow 50 + 3Q_a = 590 - 3(Q_a + Q_b)$

$\Rightarrow 6Q_a = 540 - 3Q_b \Rightarrow Q_b = \frac{540 - 6Q_a}{3} \Rightarrow Q_b = 180 - 2Q_a$

$CMg(Q_b) = BMg(Q_T) \Rightarrow 20 + 6Q_b = 590 - 3(Q_a + Q_b)$

$\Rightarrow 9Q_b = 570 - 3Q_a \Rightarrow Q_b = \frac{190 - Q_a}{3}$

Igualando; $180 - 2Q_a = \frac{190 - Q_a}{3} \Rightarrow 540 - 6Q_a = 190 - Q_a \Rightarrow \boxed{Q_a^* = 70}$, $\boxed{Q_b^* = 40}$, $\boxed{Q_T = 110}$ → Reducción de contaminación óptima.

b. Contaminación actual: $80 + 80 = 160$

$Q^* = 160 - 110$

$\boxed{Q^* = 50}$ → Nivel óptimo de contaminación.

c. Si B recibe $\frac{Q^*}{2}$ permisos: $\frac{Q^*}{2} = 25$

⇒ B debe reducir: $80 - \frac{Q^*}{2} = Q_B$

$Q_B = 55$

⇒ A recibe $\frac{Q^*}{2}$ y reduce: $80 - \frac{Q^*}{2} = Q_a$

$Q_A = 55$

A este nivel de reducción por firma, los costos son.

$CMg(Q_A) = 50 + 3(55)$

$CM(Q_a) = 215$

$CMg(Q_b) = 20 + 6(55)$

$CMg(Q_b) = 350$

Mientras que los beneficios serían:

$BMg(Q_T) = 590 - 3(110)$

$BMg_{social} = 260$

⇒ Para estos niveles de Q_a y Q_b a los que se llega entregando $Q^*/2$ licencias a cada firma, el BMg de reducir una unidad de contaminación de A es mayor que el costo marginal, por lo que no es eficiente. lo eficiente sería reducir menos de B y más de A,

d. Si los permisos son comerciables, A y B los intercambian a un precio P tal que para cada uno el Beneficio marginal de descontaminar (P) sea igual al costo marginal de hacerlo.

$$\Rightarrow CMg(Q_a) = \overset{BMg(Q_a)}{\overset{\shortparallel}{P}} \qquad CMg(Q_b) = P$$

$$50 + 3Q_a = P \quad (i) \qquad 20 + 6Q_b = P \quad (ii)$$

Además, se debe cumplir que $\boxed{Q_a + Q_b = 110}$ (iii), porque las licencias totales permiten contaminar $Q^* = 50$.

3 ecuaciones, 3 incógnitas

Igualando (i) y (ii): $50 + 3Q_a = 20 + 6Q_b$

Despejando Q_a: $Q_a = \dfrac{6Q_b - 30}{3} \Rightarrow Q_a = 2Q_b - 10$ (iv)

Reemplazando (iv) en (iii): $2Q_b - 10 + Q_b = 110$

$$Q_b = \frac{120}{3} \Rightarrow \boxed{Q_b^* = 40}$$

$$Q_a^* = 2(40) - 10$$

$$\boxed{Q_a^* = 70}$$

Reemplazando Q_a^* en (i): $50 + 3(70) = P$

$$\boxed{P = 260}$$

$\Rightarrow$ las licencias se comerciarán a un precio de 260. Así, la empresa B comprará parte de las licencias de A, que le permitirán reducir su contaminación únicamente en 40 unidades, mientras que A la reducirá en 70 unidades.

Para probar que esta es una reducción eficiente:

$$CMg(Q_a) = 50 + 3(70) = 260$$
$$CMg(Q_b) = 20 + 6(40) = 260 \qquad \Rightarrow \text{Entonces es eficiente/óptimo social}$$
$$BMg(Q_T) = 590 - 3(110) = 260$$

Punto 5

a. $u^i(x_i, G) = \ln(x_i) + \ln(G)$

I_i : riqueza inicial.

$G = G_1 + G_2$

$I_i = x_i + G_i$

i. Si cada consumidor considera el gasto del otro en G fijo:

1 resuelve:

$$\max_{x_1, G_1} \ln(x_1) + \ln(G_1 + G_2) \quad s.a: I_1 = x_1 + G_1$$

$$\mathcal{L} = \ln(x_1) + \ln(G_1 + G_2) + \lambda(I_1 - x_1 - G_1)$$

CPO: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \lambda$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{G_1 + G_2} = \lambda$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{G_1 + G_2}$

$G_1 + G_2 = x_1^*$

Reemplazando en la restricción:

$$I_1 = 2G_1 + G_2 \Rightarrow \boxed{G_1^* = \frac{I_1 - G_2}{2}}$$

$$x_1^* = \frac{I_1 - G_2}{2} + G_2 = \frac{I_1 + G_2}{2} \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{I_1 + G_2}{2}}$$

Por simetria, para 2 tenemos:

$$\boxed{G_2^* = \frac{I_2 - G_1}{2}}, \quad \boxed{x_2^* = \frac{I_2 + G_1}{2}} \Rightarrow$$

Para encontrar provisión total del bien público:

$$G_2^* = \frac{I_2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{I_1 - G_2}{2}\right) = \frac{I_2}{2} - \frac{I_1}{4} + \frac{G_2}{4}$$

$$\boxed{G_2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2I_2 - I_1}{4}}$$

$$\boxed{G_2 = \frac{2I_2 - I_1}{3}} \Rightarrow G_1 = \frac{I_1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2I_2 - I_1}{3}\right)$$

$$G_1 = \frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{3} + \frac{I_1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3I_1 + I_1 - 2I_2}{6} = G_1$$

$$\boxed{G_1 = \frac{2I_1 - I_2}{3}}$$

$$G^* = G_1 + G_2 = \frac{2I_1 - I_2 + 2I_2 - I_1}{3} = \frac{I_1 + I_2}{3}$$ } Provisión privada del bien público

ii) Para encontrar el óptimo social, usamos la regla de Samuelson:

$$TMS_1 + TMS_2 = 1 \qquad TMS_i = \frac{\partial U/\partial G}{\partial U/\partial x_i}$$

$$TMS_1 = \frac{x_1}{G}$$

$$TMS_2 = \frac{x_2}{G} \Rightarrow \frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} = 1 \Rightarrow G = x_1 + x_2$$

Reemplazando en la restricción:
(Restricción agregada: $I_1 + I_2 = G + x_1 + x_2$)

$$I_1 + I_2 = 2G \Rightarrow \boxed{G^S = \frac{I_1 + I_2}{2}}$$

provisión óptima del bien público

Comparando G^* con G^S, encontramos que

$$G^S = \frac{I_1 + I_2}{2} > \frac{I_1 + I_2}{3} = G^*$$

$\Rightarrow G^S > G^*$ y se provee más del bien público bajo el óptimo social que en el equilibrio descentralizado.

b. Si $I_1 = I_2 = 10 \Rightarrow G^* = \frac{20}{3} = 6.67$

Si $I_1 = 12$ y $I_2 = 8 \Rightarrow G^* = \frac{20}{3}$

→ Son iguales a pesar de la redistribución.

* Óptimo: $G^S = 10$

→ Aquí se proveen 3.33 unidades del bien público menos que en el óptimo.

c. $I_1 = I_2 = 10$, $\tau = 2 \Rightarrow$ Gobierno compra 4 unidades del bien público.

$$I_{1-\tau} = I_{2-\tau} = 8 \Rightarrow G^* = \frac{16}{3} + 4$$

$$G^* = \frac{16}{3} + \frac{12}{3} = \frac{28}{3} = 9.33$$

Para este nivel de riqueza, el óptimo sería: $\frac{20}{2} = 10$ $\Rightarrow$ Se proveen 0.67 unidades de G menos que en el óptimo.

Esta situación es más eficiente que la del punto b, pues aunque en ambos casos el nivel que se produce de G es menor que el óptimo, en este caso se acerca más. El nivel óptimo es $G^S = 10$ y en el último caso se producen 9.33, mientras en el punto b solo 6.67.

d. $I_1 = I_2 = 10$.

$G_i \geq 0$, $G^* = \frac{I_1+I_2}{3} = \frac{20}{3}$ $\Rightarrow I_1 + I_2 = 20$

Sabemos que $G_2^* = \frac{2I_2 - I_1}{3}$ $\Rightarrow \frac{2I_2 - I_1}{3} \geq 0$

$$2I_2 - I_1 \geq 0$$

$$2I_2 \geq I_1$$

$$I_2 \geq \frac{I_1}{2}$$

Entonces cuando 2 hace la máxima transferencia posible:

$$I_2 = \frac{I_1}{2}$$

Y debe cumplirse $I_1 + I_2 = 20$ $\Rightarrow I_1 + \frac{I_1}{2} = 20$

$\frac{3I_1}{2} = 20$ $\Rightarrow I_1 = \frac{40}{3} \approx 13.33$

$I_2 = 20 - \frac{40}{3} = \frac{20}{3} \simeq 6.67$

$10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$ ← max que 2 puede ceder.

$\Rightarrow$ 2 podría cederle a 1 hasta 13.33 de su riqueza y aún así se mantendría inalterado el nivel que se provee del bien público.

$\Rightarrow G^* = \frac{20}{3} = 6.67$ $\Rightarrow$ Se producen 3.33 unidades menos que en el óptimo.

e. $I_1 = 14$, $I_2 = 6$

Provisión de equilibrio del bien público?

$$G_1^* = \frac{2I_1 - I_2}{3} = \frac{28-6}{3} = \frac{22}{3} = 7.33$$

$G_2^* = \frac{2I_2 - I_1}{3} = \frac{12-14}{3} = \frac{-2}{3}$, pero $G_2^* \geq 0 \Rightarrow \underline{G_2^* = 0}$.

$$\Rightarrow G^* = \frac{22}{3} = 7.33 = G_1^* + G_2^* \Rightarrow \boxed{G^* = 7.33}$$

Si es una provisión más eficiente, pues se acerca más a 10, que es la provisión óptima.

f. $I_{1-\tau} = 12$ $\quad \tau = 2 \Rightarrow$ Gobierno compra 4 unidades de G.
$I_{2-\tau} = 4$

$$G_1^* = \frac{24-4}{3} = \frac{20}{3} \qquad G_2^* = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow G_2^* = 0$$

$$\Rightarrow G = \frac{20}{3} + 4 = \frac{32}{3} = 10.667.$$

Para este ingreso, el óptimo sería 10.

$\Rightarrow$ Se producen 0.667 unidades por encima del óptimo. $\Rightarrow$ No es óptimo!
Aunque no es eficiente, es más eficiente que d. y e.
Porque la diferencia con el óptimo es menor.

g. Para 4 consumidores:

Equilibrio descentralizado:

$$\max_{\{x_i, G_i\}} \ln(x_i) + \ln\left(\sum_{j=1}^{4} G_j\right) \quad s.a: I_i = x_i + G_i$$

$$\mathcal{L} = \ln x_i + \ln\left(\sum_{j=1}^{4} G_j\right) + \lambda(I_i - x_i - G_i)$$

CPO: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{1}{x_i} = \lambda$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{j=1}^{4} G_j} = \lambda$

$\Rightarrow \frac{1}{x_i} = \frac{1}{\sum G_j}$

$x_i = \sum G_j$

Reemplazando en restricción:

$$I_i = 2G_i + \sum_{j \neq i} G_j \Rightarrow G_i = \frac{I_i - \sum_{j\neq i} G_j}{2} \quad \forall i, \ i = 1,2,3,4$$

$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = g$.

$$g = \frac{I_1}{2} - \frac{3g}{2}$$

$$g\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{I_1}{2} \Rightarrow g = \frac{I_1}{5} \Rightarrow G_i = \frac{I_i}{5} \ \forall i \Rightarrow \text{Para } I = 5 \Rightarrow G_i^* = 1$$

$$\Rightarrow G = \sum_{i=1}^{4} \frac{I_i}{5}$$

Si todos tienen ingreso $I_i = 5 \Rightarrow G = \left(\frac{4 I_i}{5}\right) = 4$

$\Rightarrow$ la provisión privada del bien público en este caso sería $G_i^* = 1 \ \forall i$.
En el caso del a), esa provisión sería $G_i^* = \frac{10}{3} = 3,33$.
Por lo tanto, se demuestra que con 4 consumidores, cada uno aporta menos a G en equilibrio que en el caso que solo hay 2 consumidores.
De esta manera, en el caso con 4 consumidores $G = 4$, mientras que en el caso con 2 consumidores el equilibrio implica $G = 6.66$, que es la provisión total del bien público.

Punto 6

a. Óptimo social:

Regla de Samuelson:

$$UMg1 + UMg2 + UMg3 = CMg$$

$$\frac{1}{X} + \frac{2}{X} + \frac{3}{X} = 3$$

$$6 = 3X \Rightarrow \boxed{X = 2}$$

b. $\max_{t_i} \; \alpha_i \ln(t_1 + t_2 + t_3) - 3t_i$

CPO: $\frac{\partial \Pi}{\partial t_i} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\alpha_i}{t_1+t_2+t_3}}_{BMg} = \underbrace{3}_{CMg}$

Para 1:

$$\frac{1}{t_1+t_2+t_3} \leq 3$$

↳ El beneficio Mg será menor al CMg para cualquier $X > \frac{1}{3}$

Para 2: $\frac{2}{t_1+t_2+t_3} \leq 3 \rightarrow BMg < CMg$ siempre que $X > \frac{2}{3}$

Para 3: $\frac{3}{t_1+t_2+t_3} \leq 3 \rightarrow BMg = CMg$ si $X = 1$.

$\Rightarrow$ En equilibrio: $t_3^* = 1$, $t_2^* = 0$, $t_1^* = 0$. $\Rightarrow$ $\underline{X^* = 1}$