Introducción a la Teoría Microeconómica (versión preliminar)

Andrés Carvajal
University of Western Ontario
acarvaj@uwo.ca

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes
ariascos@uniandes.edu.co

Julio de 2014

Índice

1. Introducción

- Vamos a estudiar la actividad económica desde un punto de vista desagregado. Es decir, queremos estudiar de forma individual las unidades básicas o actores principales que tienen relevancia desde el punto de vista económico así como la forma como éstos interactúan.
- Los principales actores son: los consumidores, las firmas y el gobierno.
- Estos interactuan mediados por una serie de instituciones. Desde el punto de vista de estas notas, la principal institución mediadora es el mercado y el sistema de precios. También estudiaremos otra tipo de instituciones relacionadas con mecanismos de asignación de recursos como las subastas o algunos mecanismos de elección social; así como el papel de las instituciones cuando la información relevante para los actores es imperfecta o, cuando no existen derechos de propiedad bien definidos.
- En el caso de los consumidores y firmas nuestro objetivo es determinar y describir cuales son las asignaciones individuales (en el caso de los consumidores) y niveles de producción (en el caso de las firmas) resultantes de esta interacción y qué propiedades tienen desde el punto de vista social e individual.
- Para casi todo el curso, nuestro marco de referencia teórico será la teoría del equilibrio general. Si bien esta es una teoría muy idealizada de la actividad económica, nos permite entender cómo funcionaría la realidad en un contexto ideal y así entender las desviaciones de la realidad de la teoría. Los resultados principales son los dos teoremas fundamentaes del bienestar que discutiremos ampliamente más adelante.
- Comenzamos describiendo formalmente el comportamiento individual de uno de los principales actores.

2. Teoría del consumidor

Un consumidor es un caso particular de un agente que toma decisiones. En general, un tomador de decisiones se modela como una *estructura de escogencia* que consiste de tres elementos $(X, \succsim, \mathcal{B})$, donde X representa el espacio en el que el agente puede tomar decisiones, $\succsim$ es una relación binaria en X que determina las preferencias del agente sobre X y $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X; las asignaciones factibles en las que él podría escoger. Este último depende de carcaterísticas específicas como restricciones institucionales, precios (en el caso en que los elementos de $\mathcal{B}$ son restricciones presupuestales), etc. Más explícitamente:

- $X \neq \varnothing$ es el espacio de elección del agente: el conjunto de todas las alternativas que el agente podría, concebiblemente, elegir, más allá de retricciones de factibilidad o de sus gustos.

- $\succsim$ es una relación binaria en X (es decir, un subconjunto de $X \times X$): si $x, x' \in X$, $x \succsim x'$ quiere decir que el agente encuentra a x al menos tan bueno como x'.[1]
- Si $B \in \mathcal{B}$, quiere decir que el agente enfrenta el problema de escoger $x \in B \subseteq X$.

El supuesto de *comportamiento* que haremos sobre los consumidores es que, cuando el agente tiene que escoger en el conjunto de alternativas factibles $B \in \mathcal{B}$, éste escoge un elemento que es máximo con respecto a $\succsim$. Esto es: el agente escoge $x \in B$ si para todo $x' \in B$ tenemos $x \succsim x'$. Para que este problema esté bien definido, es necesario hacer algunos supuestos sobre estos tres objetos. Dado que nuestro objetivo es estudiar los consumidores, lo que haremos a continuación es hacer estos supuestos para el caso concreto del problema de elección del consumidor.

2.1. Espacio de consumo

Vamos a suponer aquí que existen $L \geqslant 1$ bienes. Por bien entendemos cualquier objeto tangible o intangible que es sujeto de intercambio. Implícitamente, estamos suponiendo que nuestros agentes conocen los bienes con mucha precisión y que son capaces de medirlos. Así, definimos $X = \mathbb{R}^L_+$. Luego suponemos que los bienes son perfectamente divisibles y se miden en cantidades no negativas. Un elemento $x \in X$ lo llamamos una cesta de consumo.

2.2. Preferencias y funciones de utilidad

Necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 1 (Axiomas de racionalidad) $\succsim$ *es racional si,*

1. Es completa: $\forall x, x' \in \mathbb{R}^L_+$, $x \succsim x'$ ó $x' \succsim x$ (o ambas).
2. Es transitiva: $\forall x, x', x''$, si $x \succsim x'$ y $x' \succsim x''$, entonces $x \succsim x''$.

Ejemplo 1 *(Preferencias definidas a partir de funciones). Sea $u : X \to \mathbb{R}$ cualquier función y definamos la siguiente relación de preferencia $x \succsim_u y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$. $\succsim_u$ es racional y la llamamos la relación de preferencia inducida por la función u.*

Ejemplo 2 *(Orden Lexicográfico). Definamos la siguiente relación: $(x_2, y_2) \succsim_L (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_2 > x_1$ o, si $x_2 = x_1$ y $y_2 \geq y_1$. $\succsim_L$ es racional.*

Ejemplo 3 *Defina una relación en $X = R^L_+$ de la siguiente manera: $x \succsim y \Leftrightarrow x \geq y$.[2] Entonces, $\succsim$ no es una relación de preferencia racional para $L \geq 2$.*

[1]Estrictamente, $x \succsim x'$ es una forma de escribir $(x, x') \in \succsim$

[2]Dados dos vectores $x, y \in R^L$, decimos que $x \geq y$ si y sólo si $x_i \geq y_i$, $i = 1, ..., L$.

Ejercicio 1 *Considere la siguiente relación* $(x_2, y_2) \succsim (x_1, y_1)$ *si y sólo si:* $(2x_1 + 1)2^{y_2} \leq (2x_2 + 1)2^{y_1}$. *¿Es ésta una relación de preferencia racional?*

Apartir de $\succsim$ definimos otras dos relaciones binarias sobre X:

1. La relación de *preferencia estricta* $\succ$ esta definida por: $x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y$ pero no es verdad que $y \succsim x$. En este caso decimos que x es estrictamente preferible a y.

2. La relación de *indiferencia* $\sim$ esta definida por: $x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y$ y $y \succsim x$. En este caso decimos que x es indiferente a y.

Las propiedades básicas de estas relaciones son:

Ejercicio 2 *Demuestre lo siguiente. Si* $\succsim$ *es racional entonces:*

1. $\succ$ *es irreflexiva:* $\forall x \in \mathbb{R}_+^L$, *no es cierto que* $x \succ x$.

2. $\succ$ *es transitiva.*

3. $\sim$ *es reflexiva:* $\forall x \in \mathbb{R}_+^L$, *es cierto que* $x \sim x$.

4. $\sim$ *es transitiva.*

5. $\sim$ *es simétrica: si* $x \sim x'$, *entonces* $x' \sim x$.

Completitud es relativamente razonable. Si los agentes conocen bien los bienes como hemos supuesto, entonces ellos deberían saber qué les gusta más y qué menos. El supuesto de transitividad es más controversial pues hay evidencia experimental de que los seres humanos habitualmente no lo cumplimos sin embargo, resulta fundamental para el desarrollo de la teoría.

- Crítica a la completitud: no es facil evaluar alternativas muy diferentes.

- Crítica a la transitividad: puede violarse cuando las diferencias son casi imperceptibles. Suponga que nos piden escoger entre diferentes colores para una casa. Todos los colores son versiones ligeramente diferentes de azul (sea x azul agua marina y z azul pastel):

  $$z \sim y_n \sim ... \sim y_1 \sim x$$

  en particular:

  $$z \succsim x$$

  sin embargo, si nos piden evaluar entre z y x probablemente nuestras preferencias son $x \succ z$.

Definición 2 (Axioma de continuidad) *Decimos que una relación de preferencia es continua si:* $\forall x \in \mathbb{R}_+^L$, $\{x' : x' \succsim x\}$ *y* $\{x' : x \succsim x'\}$ *es cerrado en* $\mathbb{R}_+^L$.

- La primera parte de la definición de continuidad también se llama semicontinuidad superior. La segunda, semicontinuidad inferior.

Ejemplo 4 *(Orden Lexicográfico).* $\succsim_L$ *no es continua.*

Ejercicio 3 *(Preferencias definidas a partir de funciones).* $\succsim_u$ *es continua si y sólo si* u *es continua.*

Ejercicio 4 *Muestre que la siguiente definición de continuidad es equivalente a la dada anteriormente. Una relación de preferencia* $\succsim$ *sobre* $\mathbb{R}_+^L$ *es continua si para todo* $x,\ y \in X$ *tal que* $x \succ y$ *y para todo par de secuencias* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *en* X *tales que* $x_n \to x$, $y_n \to y$ *tenemos que* $x_n \succ y$ *y* $x \succ y_n$ *para todo* n *lo suficientemente grande.*

La definición anterior quiere decir que si un agente tiene preferencias continuas y el prefiere estrictamente una canasta a otra entonces, canastas muy cercanas (o similares) a la primera, continuarán siendo estrictamente preferibles a la segunda.

- Los siguientes conjuntos serán utilizados frecuntemente. Definimos: $\{x' : x' \succsim x\}$ como el conjunto de canastas débilmente preferibles a x y lo denotamos por $\succsim x$, $\{x' : x' \succ x\}$ es el conjunto de las canastas estrictamente preferidas (o simplemente preferidas) a x y los denotamos por $\succ x$, $\{x' : x' \sim x\}$ es el conjunto de las canastas que son indiferentes a x y lo denotamos $\sim x$ y definimos de forma análoga los conjuntos: $x \succsim$ y $x \succ$, llamados el conjunto de los débilmente inferiores y estrictamente inferiores (o simplemente inferior) a x, respectivamente.

Ahora, en economía estamos acostumbrados a trabajar sobre la base de curvas de indiferencia en el espacio de consumo son convexas al origen. La forma que habitualmente suponemos que tienen las curvas de indiferencia deben deducirse de supuestos acerca de la relación $\succsim$.

Estos supuestos son de dos clases: los de la forma misma y los de la dirección de mejora. Los de la forma son postulados que dicen que los agentes prefieren canastas "balanceadas" a canastas "desbalanceadas," mientras que los de dirección de mejora dicen que los agentes prefieren más a menos. En términos de $\succsim$, estos supuestos se pueden hacer de diferentes formas. Sobre la primera propiedad, hay dos versiones:

Definición 3 (Axioma de convexidad) $\succsim$ *es convexa si* $\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^L$ *tales que* $x \succsim x'$ *y* $\forall \theta \in [0,1]$, $\theta x + (1-\theta)\, x' \succsim x'$.

Definición 4 (Axioma de convexidad estricta) $\succsim$ *es estrictamente convexa si* $\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^L$ *tales que* $x \succsim x'$ *y* $x \neq x'$ *y* $\forall \theta \in (0,1)$, $\theta x + (1-\theta)\, x' \succ x'$.

La convexidad le da a las curvas de indiferencia su forma habitual, pero permite que haya trozos rectos en ellas. La convexidad estricta elimina esta posibilidad.

Ejercicio 5 *Demuestre que si $\succsim$ es estrictamente convexa, entonces es convexa.*

Ahora, para poder estudiar la propiedad de que más es mejor, necesitamos definir qué quiere decir "más" en $\mathbb{R}^L$, lo cual puede no ser obvio cuando $L > 1$.

Notación 1 *Para $x = (x_1, ..., x_L), x' = (x'_1, ..., x'_L) \in \mathbb{R}^L$, decimos que:*

- $x \geqslant x'$ *si* $\forall l \in \{1, ..., L\}$ $x_l \geqslant x'_l$.
- $x > x'$ *si* $x \geqslant x'$ *y* $x \neq x'$.
- $x \gg x'$ *si* $\forall l \in \{1, ..., L\}$ $x_l > x'_l$.

Con la ayuda de esta notación podemos definir más reestricciones sobre las relaciones de preferencia.

Definición 5 (Axioma de monotonicidad estricta) *$\succsim$ es estrictamente monótona si $\forall x, x' \in \mathbb{R}^L_+$, $x \geq x'$ implica que $x \succcurlyeq x'$ y si $x >> x'$ entonces $x \succ x'$.*[3]

Notación 2 *Monotonicidad estricta es lo mismo que las preferencias sean estrictamente crecientes.*

- Obsérvese que monotonicidad estricta es una hipótesis más fuerte que nosaciabilidad local.
- Monotonicidad estricta implica que en cualquier punto, el ortante abierto superior a él está estrictamente por encima de la curva de indiferencia y que los bordes son débilmente preferibles.

Ejemplo 5 *(Leontief). Las preferencias de Leontief son estrictamente monótonas y convexas pero nos son estrictamente convexas.*

Ejemplo 6 *(Orden Lexicográfico). $\succsim_L$ es estrictamente convexa y estrictamente monótona.*

Ejercicio 6 *Sea $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. Dibujar los conjuntos débilmente preferibles y las curvas de indiferencia de una canasta arbitraria e ilustrar todos los axiomas gráficamente.*

Ejemplo 7 *(Tasa Marginal de Sustitución). Sea $\succsim$ una relación de preferencia racional sobre $\mathbb{R}^L_2$ tal que los conjuntos de indiferencia sean en efecto çurvas suaves"(véase figura). La tasa marginal de sustitución (TMS) del bien 2 por el bien 1 en el punto (x_1, x_2) se define como el valor absoluto de la pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia que pasa por ese punto. Ésta mide qué tanto está dispuesto el consumidor a dar del bien 2 a cambio de una unidad del bien 1. Denotamos ésta por $TMS_{1,2}(x_1, x_2)$. Usualmente, suponemos que la*

[3] Esta definición es la misma Jehle y Reny [2001] y es distinta a la definición de Mas-Colell, Whinston y Green [1995]. La definición de monotonicidad estricta de Mas-Colell, Whinston y Green [1995] es más fuerte que la defínción de Jehle y Reny [2001].

TMS es decreciente en el primer bien. Esto es, entre más tenemos del bien 1 menos estamos dispuestos a entregar del bien 2 a cambio de una unidad del bien 1. Es fácil ver que si $\succsim$ es convexa entonces la $TMS_{1,2}(x_1, x_2)$ es decreciente en el primer bien.

Un forma de calcularla es la siguiente. En el caso de la figura de arriba, supongamos que $\succsim$ se deriva de una función u diferenciable y que la función $x_2 = f(x_1)$ describe la curva de indiferencia de esta figura. Enotonces, es fácil ver que para todo x_1, se cumple $u(x_1, f(x_1)) = c$, donde c es una constante. Luego,

$$\frac{\partial u(x_1, f(x_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, f(x_1))}{\partial x_2} f'(x_1) = 0$$

y por lo tanto,

$$TMS_{1,2}(x_1, f(x_1)) = |f'(x_1)| = -f'(x_1) = \frac{\frac{\partial u(x_1, f(x_1))}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, f(x_1))}{\partial x_2}}$$

Ahora, los economistas solemos utilizar un objeto artificial que denominamos la función de utilidad. Aunque este artificio no es absolutamente necesario en la construcción de la teoría del equilibrio general, su uso permite utilizar todas las herremientos del cálculo diferencial y así, desde el punto de vista matemático, el comportamiento de los agentes se simplifica considerablemente. Vamos a seguir aquí esa convención aunque al hacerlo perdemos algo de generalidad.

Definición 6 (Representabilidad de preferencias por funciones de utilidad) *Una relación de preferencia $\succsim$ en $\mathbb{R}_+^L$ es representable por una función de utilidad u, si existe una función $u : \mathbb{R}_+^L \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) \geqslant u(x')$ si y sólo si $x \succsim x'$. Es decir, si existe u tal que $\succsim = \succsim_u$. En este caso se dice que u representa a $\succsim$. Llamamos a cualquier función u que represente $\succsim$ una función de utilidad asociada a $\succsim$.*

Obsérvese que esta representación no es única: Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, entonces $v = f \circ u$ representa a $\succsim$. De hecho se puede demostrar que si v y μ representan la mismas preferencias entonces existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente tal que $v = f \circ u$.

Ejercicio 7 *Muestre que en la afirmación anterior es necesario que f sea estrictamente creciente.*

Dado que nuestro concepto básico (primitivo) sobre la escogencia de los agentes es el concepto de relación de preferencia, la primera pregunta que deberíamos de hacer es, ¿Cuando una relación de preferencia es representable por una función de utilidad? En uno de los ejemplos anteriores mostramos que si $u : \mathbb{R}_+^L \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función entonces la relación de preferencia inducida por u es racional. Luego una condición necesaria para que una relación de preferencia sea representable es que sea racional. En efecto, solo un poco más es suficiente:

Teorema 1 *Toda relación de preferencia racional y continua sobre $\mathbb{R}_{+}^{L}$ puede ser representada por una función de utilidad continua.*

Ejemplo 8 *El orden lexicográfico no es representable por una función de utilidad. Que no sea representable por una función de utilidad continua es una consecuencia de uno de los ejercicios anteriores, sin embargo que no sea representable por cualquier tipo de función no es completamente trivial (Véase Araujo [2004]).*

Ejercicio 8 *Demuestre lo siguiente: si u representa a $\succsim$, entonces*

1. $x \succ x'$ *si, y sólo si,* $u(x) > u(x')$.
2. $x \sim x'$ *si, y sólo si,* $u(x) = u(x')$.

Las características de las preferencias se traducen en características de las funciones de utilidad que las representan.

Definición 7 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{+}^{L}$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbb{R}$. Decimos que f es cuasicóncava si $\forall x, x' \in X$, $x \neq x'$ y $\forall \theta \in (0,1)$, $f(\theta x + (1-\theta)x') \geq$ $\min\{f(x), f(x')\}$. Decimos que f es estrictamente cuasicóncava cuando $\geq$ se puede remplazar por $>$.*

Ejercicio 9 *Demuestre lo siguiente: si u representa a $\succsim$, entonces*

1. *Si $\succsim$ es convexa, entonces u es cuasicóncava.*
2. *Si $\succsim$ es estrictamente convexa, entonces u es estrictamente cuasicóncava.*
3. *Si $\succsim$ es estrictamente monótona, entonces u es estrcitamente monótona creciente.*
4. *Probar que toda función estrictamente monótona de R en R es estrictamente cuasicóncava.*
5. *Sea X un conjunto finito y $\succsim$ una relación de preferencia racional sobre X, mostrar que existe una función de utilidad que la representa.*
6. *Dar un ejemplo de una función cuasicóncava que no sea cóncava.*
7. *Considere las tres relaciones de preferencia definidas por las siguientes funciones:*

    a) $u_1(x,y) = xy$

    b) $u_2(x,y) = \min\{x,y\}$

    c) $u_3(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Haga un dibujo de las curvas de indiferencia y conjuntos débilmente preferidos a una canasta arbitraria y clasifique las preferencias asociadas de acuerdo a si son continuas, monótonas, estrictamente monótonas, convexas, etc.

8. *¿Puede una relación de preferencia continua tener una representación no continua?*

9. *Sean u_i con $i = 1...n$, n-funciones cóncavas (estrictamente) y α_i con $i = 1...n$ números no negativos (no todos iguales a cero), demostrar que la función $u = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i u_i$ es cóncava (estrictamente).*

2.3. Canastas factibles

Nos queda por estudiar el objeto $\mathcal{B}$. Como es habitual, definimos, para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ y todo $y \in \mathbb{R}_+$ la restricción presupuestal como el conjunto:

$$B(p, y) = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leqslant y\right\}$$

La familia $\mathcal{B}$ se define como el conjunto de todos los posibles conjuntos presupuestales:

$$\mathcal{B} = \left\{B \subseteq \mathbb{R}^L : \exists (p, y) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+ : B(p, y) = B\right\}$$

Suponemos que cuando el agente enfrenta un conjunto presupuestal definido por precios p e ingreso y, escoge un elemento que es máximo con respecto a sus preferencias $\succsim$ (esta es nuestra hipótesis sobre el comportamiento de los consumidores).

3. Demanda Marshalliana

Cuando las preferencias son representables por una función de utilidad nuestra hipótesis sobre el comportamiento de los consumidores se puede plantear como el siguiente problema llamado el *problema del consumidor* (PC):

$$\max_{x \in B(p,y)} u(x)$$

Teorema 2 *Cuando las preferencias son representables por una función de utilidad continua, existe una solución al problema del cosumidor.*

Prueba. Como $y \geqslant 0$ y $p \gg (0, ..., 0)$, el conjunto $B(p, y)$ es compacto. Esto es suficiente para la existencia de un maximizador. ■

Cualquier x que solucione el anterior problema es una demanda óptima para el consumidor. Como la demanda es un elemento fundamental de nuestra teoría, en adelante siempre supondremos que $\succsim$ es representable por una función de utilidad continua u.

Teorema 3 *Si u es cuasicóncava y $x, x' \in \mathbb{R}^L_+$ son soluciones al problema de maximización a precios p e ingreso y, entonces $\forall\theta \in [0,1]$, la canasta $\theta x + (1-\theta)\, x'$ también es solución al problema.*

Prueba. Queda como ejercicio. ■

Teorema 4 *Si u es continua y estrictamente cuasicóncava entonces para todo p y todo y, la solución al problema de maximización es única.*

Prueba. Queda como ejercicio. ■

Definición 8 *Sea u continua y estrictamente cuasicóncava entonces por la proposición anterior podemos definir la función de demanda marshalliana como $x : R^L_{++} \times R_+ \to R^L_+$ donde $x(p, y)$ es la solución al problema del consumidor cuando los precios son p y la riqueza inicial es y.*

Dado el anterior teorema, queda claro que cuando las preferencias son estrictamente convexas, uno puede definir una función de demanda $x : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^L_+$. Cuando esta condición no se satisface, lo máximo que uno puede es establecer una correspondencia de demanda. El teorema 3 implica que tal correspondencia es de valores convexos.

- Es fácil ver que la función de demanda Marshaliana es homogénea de grado cero.

Ejemplo 9 (Geometría del problema del cosumidor) *A partir de la figura típica del problema del cosumidor es fácil deducir la ley de la demanda para bienes normales (esto es, para bienes tales que al aumentar el ingreso aumenta la demanda por ellos). Sin embargo, no hay nada de la teoría desarrollada hasta este punto que implique la ley de la demanda como se conoce tradicionalmente: entre mayor sea el precio de un bien, menor es la demanda por éste.*

La propiedad de monotonicidad estricta tiene como consecuencia el siguiente teorema.

Teorema 5 (Ley de presupuesto balanceado) *Si u es estrictamente monótona y x resuelve el problema de optimización a precios p e ingreso y, entonces $p \cdot x = y$.*

Prueba. Queda como ejercicio. ■

El siguiente teorema ofrece una caracterización parcial de la solución al problema del consumidor (condiciones necesarias).

Teorema 6 (Kuhn - Tucker) *Consideremos el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} & \max f(x,a) \\ & s.a \\ g^j(x,a) \quad \geq \quad & 0, \;\; j = 1, ...k \end{aligned}$$

donde $f, g^j : R^n \times R^m \to R$ son funciones continuamente diferenciables. Sea $\mathcal{L}(x, a, \lambda) = f(x, a) + \lambda \cdot g(x, a)$. Fijemos a y sea una solución al problema de optimización tal que el conjunto de vectores $\nabla g^j(x^*, a)$, cuando la restricción se da con igualdad, es linealmente independiente. Entonces existe $\lambda^* \in R^k$ tal que

1. $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, ...n$
2. $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_j} \geq 0$, $j = 1, ...k$
3. $g^j(x, a) \geq 0$, $\lambda_j^* g^j(x, a) = 0$, $j = 1, ...k$.
4. $\lambda^* \geq 0$ *si* x^* *es un máximo.*

Siendo más formales deberíamos de escribir x^* como una función del vector a, $x^*(a)$.

Nota técnica 1 *El anterior teorema se se puede extender al caso en el que f, g^j son funciones tales que $f, g^j : D \times R^m \to R$ donde $D \subset R^n$ y x^* esta en el interior de D. Esta es la forma como típicamente usamos el teorema en la teoría del consumidor donde $D = R^n_+$ y suponemos que $x^* >> 0$.*

Ejercicio 10 *Consideremos el siguiente problema:*

$$\begin{array}{rcl} & & \max u(x) \\ & & s.a \\ y & \geq & p \cdot x \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

donde $u : R^L \to R$. Sea $\mathcal{L}(x, \lambda) = u(x) + \lambda(y - p \cdot x)$ y supongamos que u es continuamente diferenciable. Si $x^* >> 0$ es una solución al problema del cosumidor entonces por el teorema de Kuhn-Tucker las siguientes condiciones son necesarias: existe $\lambda^* \geq 0$ tal que:

1. $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{x_i} = 0$.
2. $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{\lambda_i} \geq 0$.
3. $\lambda^*(y - p \cdot x^*) = 0$.

La tercera condición es inocua cuando se cumple la ley de presupuesto balanceado. Cuando u es estrictamente creciente entonces $\lambda^* >> 0$ y cuando la función de utilidad es cuasicóncava y $\lambda^* >> 0$ entonces las condiciones anteriores también son suficientes.

Ejemplo 10 *(Función de utilidad Cobb-Douglas). Sea $u(x_1, ..., x_L) = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_L^{\alpha_L}$ donde $\alpha_i > 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Entonces la función de demanda marshalliana es $x(p, y) = y\left(\frac{\alpha_1}{p_1}, ...\frac{\alpha_L}{p_L}\right)$.*

Ejercicio 11 *(Función de utilidad con elasticidad constante de sustitución CES). Sea $u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho < 1$, $\rho \neq 0$. El parámetro σ determina la eslaticidad intertemporal de sustitución $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.*

1. *Mostrar que u representa preferencias estrictamente monótonas y estrictamente convexas.*

2. *Calcular la demanda Marshalliana.*

Finalmente otro resultado que será muy importante es:

Teorema 7 (Continuidad de la demanda) *Dada u es estrictamente cuasicóncava, la función de demanda $x : \mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^L$ es continua.*

Prueba. La prueba es una aplicación del teorema del máximo. ■

3.1. Resumen y resultados principales

Dada la importancia de algunas características de las relaciones de preferencia, de ahora en adelante vamos hacer los siguientes supuestos sobre las preferencias del consumidor.

Condición 1 (Preferencias Neoclásicas) *Las relaciones de preferencia de los consumidores satisfacen:*

1. *Racionales y continuas (luego representables por una función de utilidad continua).*

2. *Estrictamente monótonas y estrictamente convexas (luego cualquier función de utilidad que las represente es estrictamente monótona y estrictamente cuasicócava).*

   En este caso diremos que la relación de preferencia de cada consumidor es una relación de preferencia Neoclásica.

Las implicaciones de estos supuestos las hemos discutido ampliamente. En la práctica, la teoría es bastante más sencilla si asumimos:

Condición 2 (Diferenciabilidad de la demanda) *La demanda marshalliana es una función continuamente diferenciable en $\mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_{++}$. Es decir, todas sus derivadas parciales existen y son continuas.*

Esta hipótesis de la demanda Marshalliana también se puede deducir de supuestos sobre las relaciones de preferencia o las funciones de utilidad que las representan. No exploraremos el tema por ser bastante técnico y no tan relevante en la práctica.

Los siguientes dos teoremas encierran las propiedades más importantes de la demanda Marshalliana.

Teorema 8 *Sea $x : R^L_{++} \times R_+ \to \mathbb{R}^L_+$ la demanda Marshalliana correspondiente a una relación de preferencia neoclásica. Entonces*

1. *x es una función continua.*

2. *x es homogénea de grado cero (como función de ambos argumentos).*

3. *Ley del resupuesto balanceado: $p \cdot x(p, y) = y$ para todo $(p, m) \in R^L_{++} \times R_+$*

Por compleititud incluimos el siguiente resultado que sólo será importante cuando hablemos de la existencia del equilibrio competitivo en una economía de intercambio.

Teorema 9 *Sea $x : R^L_{++} \times R_+ \to \mathbb{R}^L_+$ la demanda marshalliana correspondiente a una relación de preferencia Neoclásica y $\{p_n\}_{n=1,\ldots}$ una secuencia de precios en R^L_{++}. Si $p_n \to p \in \partial R^L$ y $y > 0$ entonces $\left\{ \sum_{i=1}^{L} x_i(p_n, y) \right\}_{n=1\ldots}$ es una sucesión no acotada.*

Ejercicio 12 *Encontrar la demanda Marshalliana cuando la función de utilidad es:*

1. $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.
2. $u(x_1, x_2, x_3) = \min \{2x_1, x_2, x_3\}$.

3.2. Función de utilidad indirecta

La función de utilidad indirecta se define como la función valor del problema del consumidor:

$$v(p, y) = \max_{x \in B(p,y)} u(x)$$

La importancia de la función de utilidad indirecta será clara más adelante cuando estudiemos el bienestar del consumidor en diferentes circunstancias. Adicionalmente, como veremos en esta sección y cuando estudiemos el problema de identificación, la función de utilidad indirecta resume gran parte de la información contenida en el problema del consumidor. El siguiente resultado es la clave para deducir varias de sus propiedades.

Teorema 10 (Envolvente) *Considere el siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} M(a) &= \max_x f(x, a) \\ & s.a \\ g(x, a) &= 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde a es un vector de parámetros dados, x es un vector de escogencia y f y g son funciones continuamente diferenciables en el vector de parámetros a.

1. *Para cada vector de parámetros a supongamos que $x(a) >> 0$ es un vector que resuleve el anterior problema, es único y es continuamente diferenciable en su argumento.*

2. *Supongamos que $\lambda(a)$ son los multiplicadores de Lagrange definidos en el teorema 6.*

Entonces:

$$\frac{\partial M}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}\left(x, \lambda, a\right)}{\partial a_i} \mid_{x=x(a), \lambda=\lambda(a)}$$

donde $\mathcal{L}\left(x, \lambda, a\right) = f\left(x, a\right) + \lambda g(x, a)$.

Ejemplo 11 (El problema del consumidor) *Sea $a = (p, y)$, $f(x, p, y) = u(x)$ y $g(x, p, y) = y - p \cdot x$. Es fácil verificar usando el teorema de la envolvente que:*

$$x_i(p, y) = -\frac{\frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,y)}{\partial y}}$$

ecuación conocida como identidad Roy.

Ejemplo 12 (Cobb - Douglas) *Verificar la identidad de Roy para el caso de la función de utilidad Cobb -Douglas de dos bienes.*

Proposición 1 (Propiedades de la función de utilidad indirecta) *La función de utilidad indirecta satisface:*

1. *Es continua.*

2. *Homogénea de grado cero en (p, y).*

3. *Creciente en y.*

4. *Decreciente en p.*

5. *Cuasiconvexa.*

6. *Satisface la identidad de Roy.*

Prueba. Los numerales 1, 3, 4 y 6 son consecuencias inmediatas del teorema 6 y del teorema de la envolvente. El numeral 2 es una consecuencia de la ley de Walras o presupuesto balanceado. Ahora consideremos la afirmación del numeral 5. Tenemos que demostrar que:

$$v(p_{(\lambda)}, y_{(\lambda)}) \leq \text{máx}(v(p_1, y_1), v(p_2, y_2))$$

donde $p_{(\lambda)} = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2$ y $y_{(\lambda)} = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$. Es fácil ver que $B(p_{(\lambda)}, y_{(\lambda)}) \subset B(p_1, y_1) \cup B(p_2, y_2)$. El resultado se sigue de forma inmediata. ■

4. Demanda Hicksiana

El problema del consumidor se puede escribir de una forma equivalente (dual). La equivalencia entre las dos formas será el objeto de la próxima sección. En esta sección nos concentramos en su intepretación y relevancia para la teoría del consumidor.

El *problema de minimización del gasto* (el problema dual del problema del consumidor - DPC) es:

$$\begin{aligned} e(p,\mu) &= \min_{x \in R_+^L} p \cdot x \\ & \quad s.a \\ u(x) &\geq \mu \end{aligned}$$

donde μ es el mínimo nivel de utilidad que se desea satisfacer, $e(p,\mu)$ es la función de gasto mínimo (o simplemente la funcion de gasto) y todas las demás variables tienen el mismo significado que en las secciones anteriores.

- Obsérvese que la solución a este problema siempre existe y que además la cesta que minimiza el gasto es siempre única.
- La solución (cesta que minimiza) a este problema la llamamos la demanda compensada o Hicksiana y la denotamos por $x^h(p,\mu)$.

Ejemplo 13 (Geometría del problema dual del cosumidor) *. A partir de la figura típica del problema dual del problema del cosumidor es fácil deducir la ley de la demanda en términos de la demanda Hicksiana. Más adelante vamos a demostrar que esta ley de la demanda es independiente de las características del bien (como ser un bien normal o inferior).*

Proposición 2 (Propiedades de la función de gasto) *La función de gasto satisface:*

1. *Es continua.*
2. *Creciente en μ.*
3. *Homogénea de grado uno en p.*
4. *Cóncava p.*
5. *Satisface el lema de Shephard:*

$$x_i^h(p,\mu) = \frac{\partial e(p,\mu)}{\partial p_i}$$

Prueba. Los numerales 1, 2, y 5 son fáciles de deducir del teorema 6 y del teorma de la envolvente (esto queda como ejercicio para el lector). El numeral

3 es inmediato. Más ilustrativo es la demostración del numeral 4. Queremos demostrar que:

$$e(p_{(\lambda)}, \mu) \geq \lambda e(p_1, \mu) + (1 - \lambda) e(p_2, \mu)$$

Ahora obsérvese que por definición:

$$\begin{aligned} e(p_1, \mu) &\leq p_1 x^h(p_{(\lambda)}, \mu) \\ e(p_2, \mu) &\leq p_2 x^h(p_{(\lambda)}, \mu) \end{aligned}$$

y sumando estas dos ecuaciones se obtiene el resultado deseado. ■

Proposición 3 (Ley de la demanda Hicksiana)

$$\frac{\partial x_i^h(p, \mu)}{\partial p_i} \leq 0$$

Prueba. Es una consecuencia inmediata del lema de Shephard y la concavidad en precios de la función de gasto. ■

Ejemplo 14 (Cobb - Douglas) *En el caso de funciones de utilidad Cobb - Douglas las demandas Hicksianas son:*

$$\begin{aligned} x_1^h(p, \mu) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} \mu \\ x_2^h(p, \mu) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\alpha} \mu \end{aligned}$$

y la función de gasto es:

$$e(p, \mu) = p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} \mu \left(\frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right).$$

5. Dualidad y descomposición de la demanda

La siguiente proposición resume la relación entre los dos problemas.

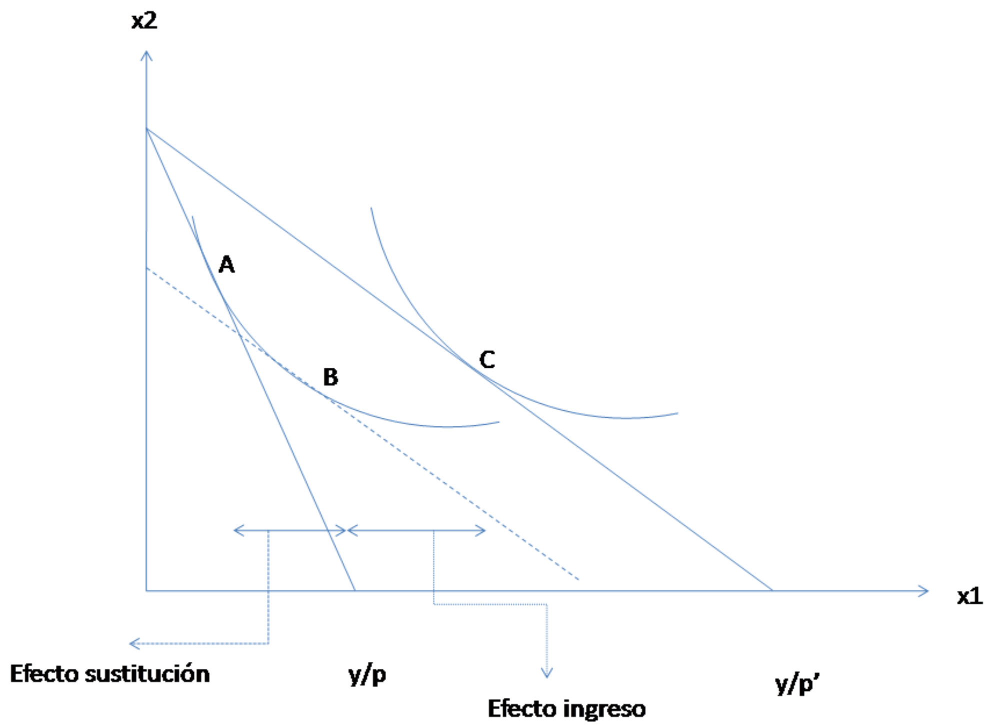
Proposición 4 (Dualidad) *Las siguientes ecuaciones establecen la relación entre las dos formas de abordar el problema de consumidor.*

1. $v(p, e(p, \mu) = \mu$.
2. $e(p, v(p, y)) = y$.
3. $x_i(p, y) = x_i^h(p, v(p, y))$.
4. $x_i^h(p, \mu) = x_i(p, e(p, \mu))$.

5.1. Descomposición de la demanda en el efecto ingreso y sustitución

- El cambio en la demanda de un agente debido al cambio en precios relativos suponiendo que este mantiene su mismo nivel de utilidad se conoce como el efecto sustitución (es decir la variación en la demanda Hicksiana).

- Aquella parte de la demanda Marshaliana que no la explica el efecto sustitución se denomina el efecto ingreso. Ésta corresponde al cambio en la demanda debido al cambio en el ingreso real del agente debido a un cambio en precios. Intutitivamente, al aumentar o disminuir los precios el agente puede asignar más o menos recursos al consumo de todos los bienes.


x2
A
B
C
x1
Efecto sustitución
y/p
Efecto ingreso
y/p'

- El siguiente teorema establece la relación más importante de la teoría de la demanda.

Teorema 11 (Slutsky)

$$\frac{\partial x_i\left(p,y\right)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^h\left(p,\mu\right)}{\partial p_j}-x_j\left(p,y\right)\frac{\partial x_i\left(p,y\right)}{\partial y}$$

donde $\mu = u(x(p,y))$. *El primer término representa el efecto sustitución y el segundo el efecto ingreso.*

Prueba. Por la proposción 4:

$$x_i^h\left(p,\mu\right)=x_i\left(p,e(p,\mu)\right)$$

Ahora:

1. Derivamos ambos lados con respecto a p_j,

$$\frac{\partial x_i^h\left(p,\mu\right)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i\left(p,e(p,\mu)\right)}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i\left(p,e\left(p,\mu\right)\right)}{\partial y}\frac{\partial e\left(p,\mu\right)}{\partial p_j}$$

2. Utilizamos la identidad de Shephard para eliminar las derivadas de la función de gasto.
3. Utilizamos $e(p,v(p,y))=y$.
4. Utilizamos $x_i(p,y)=x_i^h(p,v(p,y))$.

■

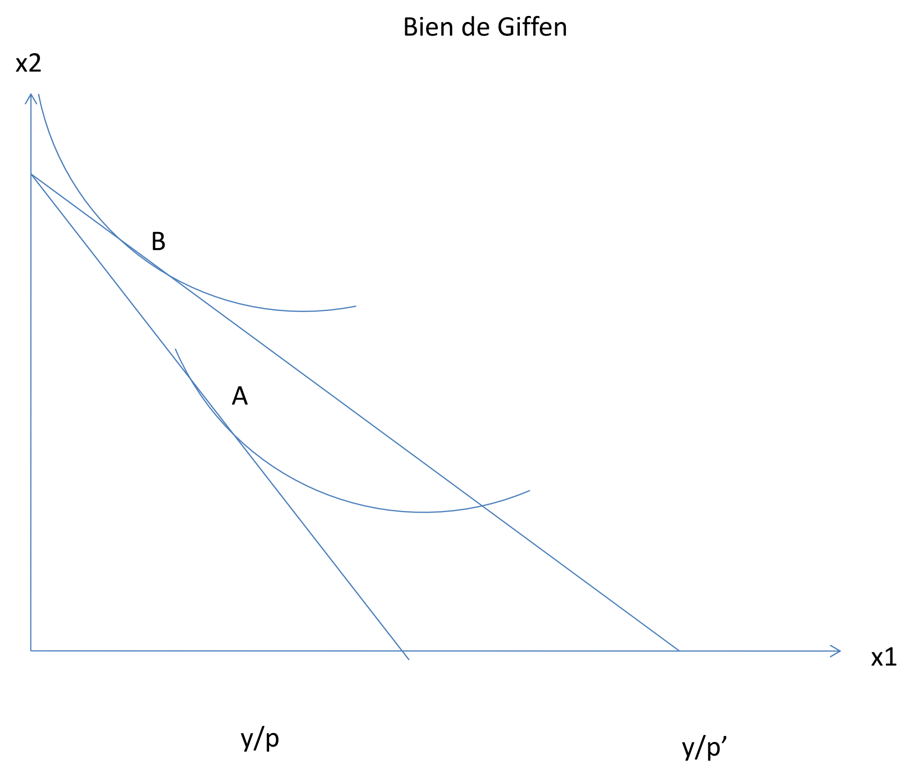
5.2. Aplicación: la ley de la demanda

- Utilizando la ecuación de Slutsky es posible precisar más la ley de la demanda.
- Anteriormente obervamos que no habian nada en la teoría desarrollada hasta el momento que implicara la ley de la demanda para la función de demanda Marshalliana (véase ejemplo abajo). Es decir, la ley de la demanda es consistente con la teoría del consumidor pero no es necesaria a partir de la hipótesis que hemos hecho hasta el momento. En efecto, esta caracerística puede intepretarse realmente como una virtud, pues encierra algunos fenómenos conocidos en los mercados reales.

Ejemplo 15 (Bienes de Giffen) *Se denominan bienes de Giffen aquellos para los cuales no se cumple la ley de la demanda.*[4] *El ejemplo clásico es la demanda por papa. Intuitivamente, al aumentar el precio de la papa, el efecto ingreso*

[4] Debido a Giffen (1837-1910), economista Escocés.

es tan fuerte que dejan de consumir otros bienes de consumo más costosos y aumentan su demanda por papa para suplir las deficiencias alimenticias. Es decir, intuitivamente un bien de Giffen debe ser un bien inferior. La figura bajo ilustra el cambio de la demanda en presencia de un bien de Giffen.



- Las siguientes observaciones son inmediatas a apartir de la ecuación de Slutsky:
  - Si un bien es normal el efecto ingreso refuerza el efecto sustitución.
  - Para que un bien sea de Giffen es necesario que sea un bien inferior. Más aún, el efecto ingreso debe dominar el efecto sustitución.

5.3. Aplicación: Bienestar individual

- La funcion de utilidad indirecta permite definir una medida natural de cambios en bienestar individual.

- Por ejemplo, supongamos que el precio de un bien cambia de p^0 a p^1 manteniendo todos los demás precios constantes (esto puede ser consecuencia de una política de tributación o subsidios): $p^1 < p^0$

- Sea $v(p^0, y^0)$ y $v(p^1, y^0)$ la utilidad indirecta antes y después del cambio en precios cuando el ingreso del individuo es y^0 (por simplicidad ignoramos todos los demás precios).

- Recordemos que v es una función decreciente en precios y creciente en el ingreso.

- Una medida natural del cambio en bienestar del agente es:

$$v(p^1, y^0) - v(p^0, y^0)$$

  pero recordemos que la función de utilidad indirecta es no observable y es apenas una medida ordinal.

- Alternativamente, una medida denominada en unidades del numerario de la economía es el ingreso $CV(p^0, p^1, y^0) \leq 0$ con el que habría que compensar a un agente para ser indiferente ante el cambio:

$$\begin{aligned} v(p^0, y^0) &= v(p^1, y^0 + CV(p^0, p^1, y^0)) \\ &= v(p^1, y^1) \end{aligned}$$

- Esta medida de bienestar se llama la variación compensada de Hicks.

- Ahora obsérvese que:

$$\begin{aligned} e(p^1, v(p^0, y^0)) &= e(p^1, v(p^1, y^0 + CV(p^0, p^1, y^0)) \\ &= y^0 + CV(p^0, p^1, y^0) \end{aligned}$$

  de otra parte:

$$e(p^0, v(p^0, y^0)) = y^0$$

  luego:

$$\begin{aligned} CV(p^0, p^1, y^0) &= e(p^1, v(p^0, y^0)) - e(p^0, v(p^0, y^0)) \\ &= \int_{p^0}^{p^1} \frac{\partial e(p, v(p^0, y^0))}{\partial p} dp \\ &= \int_{p^0}^{p^1} x^h(p, v(p^0, y^0)) dp \end{aligned}$$

- La dificultad con esta caracterización de la variación compensada es que la demanda Hicksiana no es observable.
- Si recordamos la geometría de la demanda Marshalliana y Hicksiana no es aventurado hacer la siguiente aproximación (y sí es bien útil):

$$CV(p^0, p^1, y^0) \approx \int_{p^0}^{p^1} x(p, v(p^0, y^0))dp$$

- La gran ventaja de esta aproximación es que la demanda Marshalliana sí es una función observable.

5.4. El costo en bienestar de la inflación anticipada

- La variación compensada es un concepto muy útil con muchas aplicaciones. Aquí vamos a dar una aplicación a un área aparentemente distante de los temas principales de estas notas. En efecto, esta aplicación pone de manifiesto la relevancia de las ideas microecnómicas para el estudio de la macroeconomía.
- Supongamos que existe un agente representativo de la economía que deriva utilidad de los saldos reales de dinero (esto no es absolutamente necesario pero si hace la discusión bastante más directa).
- La función de demanda por saldos reales es:

  $$m(r) = Ae^{-Br}$$

  donde r es la tasa de interés nominal de la economía y A y B son contantes positivas. Entre mayor es la tasa de interés menor es la demanda por saldos reales.
- Por la ecuación de Fischer, la tasa de interés nominal, las tasa de interés real R y la inflación esperada π^e están relacionadas por la siguiente ecuación:

  $$r = R + \pi^e$$

- La teoría económica afirma que, por lo menos en el largo plazo, la tasa de interés real está determinada por factores reales (la razón capital trabajo, la productividad de la economía, etc).
- Luego, *ceteris paribus*, son las expectativas de inflación las que determinan la tasa de interés nominal. Ésta, a su vez, la determina la política monetaría.
- Supogamos que la autoridad monetaria implementa una política restrictiva de reducción de la inflación (y por lo tanto de la expectativas de inflación). Esto tiene como consecuencia que la tasa de interés nominal pasa de r^0 a r^1, $r^1 < r^0$.

- La pregunta que nos hacemos es ¿Cuál es la ganancia en bienestar (o costo) de reducir la inflación en una cantidad $r^0 - r^1$?

- Es muy interesante que lo que hemos estudiado hasta este momento permite dar una respuesta muy sencilla a esta pregunta. La variación compensada CV es:

$$CV = \int_{r^0}^{r^1} m(r)dr$$

- Luego la ganancia en bienestar es $|CV|$.

6. Restricciones observables, integrabilidad e identificación

6.1. Restricciones observables

- En esta sección resumimos tres resultados de carácter general que en principio podrían ser utilizados para responder la siguiente pregunta: ¿Dada una función $x : R_+^L \times R \to R_+^L$ cuando podemos afirmar que ésta no es la demanda Marshalliana del problema de un consumidor con preferencias Neoclásicas? Este es el problema falsebilidad de la teoría del consumidor.

- Las siguentes son tres implicaciones de la teoría cuando las preferencias son Neoclásicas:

  1. La demanda es homogénea de grado cero.
  2. La demanda satisface la ley de presupuesto balanceado.
  3. La matriz de Slutsky:

  $$s(p,y) = \left(\frac{\partial x_i\,(p,y)}{\partial p_j} + x_j\,(p,y)\,\frac{\partial x_i\,(p,y)}{\partial y} \right)_{i,j}$$

  es simétrica y negativa semidefinida.

  La tercera implicación requiere una demostración. Por la ecuación de Slutsky la matriz de Slutsky es igual a la matriz de sustitución de Hicks:

  $$\sigma(p,\mu) = \left(\frac{\partial x_i^h\,(p,\mu)}{\partial p_j} \right)_{i,j}$$

  que es simétrica por el lema de Shephard y el teorema de Young[5]. Además, es negativa semidefinida porque la función de gasto es cóncava en los precios.

- Ahora, dado que hemos resaltado tres implicaciones importantes de la teoría del cosumidor, surgen ciertas preguntas naturales:

  1. ¿Son estas tres implicaciones independientes entre ellas?
  2. ¿Existe alguna otra implicación de la teoría del consumidor independiente de las tres mencionadas?
  3. Si no existen otras implicaciones, quiere decir esto que si una función satisface estas tres afirmaciones esto implica que existen preferencias neoclásicas tales que la demanda Marshalliana satisface estas relaciones?

[5] Véase el Apéndice matemático de [JR].

- Por lo pronto vamos a demostrar que la propiedad de homogeneidad de grado cero se deriva de las otras dos propiedades. Éste es un resultado muy sorprendente!

Teorema 12 (Homogeneidad de grado cero no es independiente) *Sea $x(p, y)$ una función que satisface la ley de presupuesto balanceado y que la matriz de Slutsky es simétrica. Entonces esta función es homogénea de grado cero.*

Prueba. Derivando la ecuación que establece que el presupuesto se balancea obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_j p_j \frac{\partial x_j(p,y)}{\partial p_i} &= -x_i(p,y) \\ \sum_j p_j \frac{\partial x_j(p,y)}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Ahora definamos $f(t) = x(tp, ty)$, $t > 0$. El objetivo es demostrar que para todo t, $f'(t) = 0$. Derivando f obtenemos:

$$f_i'(t) = \sum_j p_j \frac{\partial x_i(tp,ty)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(tp,ty)}{\partial y} y$$

Utilizando que el presupuesto se balancea eliminamos y del segundo término de esta ecuación y obtenemos:

$$f_i'(t) = \sum p_j \left(\frac{\partial x_i(tp,ty)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(tp,ty)}{\partial y} x_j(tp,ty) \right)$$

Los términos entre paréntesis son los elementos de la ecuación de Slutsky luego por simetría:

$$f_i'(t) = \sum p_j \left(\frac{\partial x_j(tp,ty)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(tp,ty)}{\partial y} x_i(tp,ty) \right)$$

y utilizando las primeras dos ecuaciones de esta demostración es fácil ver que $f_i'(t) = 0$. ■

6.2. Integrabilidad e indentificación

- El problema de integrabilidad consiste en describir las condiciones bajo las cuales el comportamiento observado (i.e., la escogencia como función de precios de un agente) es racionalizable con una estructura de escogencia que satisface las propiedades usales (preferencias racionales, convexas y representables por una función de utilidad monótona).

- El primer paso con miras a resolver el problema de integrabilidad es la siguiente proposición que profundiza sobre la relación entre el problema PC y el DPC.

Proposición 5 *Sea* $e : R^L_{++} \times R_+ \to R$ *una función que satisface todas la propiedades de una función de gasto (véase teorema 1.7 de [JR]). Definamos:*

1. $A(p, \mu) = \left\{ x \in R^L_+ : p \cdot x \geq e(p, u) \right\}$.
2. $A(\mu) = \bigcap_{p \in R^L_{++}} A(p, \mu)$.

Entonces la función $u : R^L_+ \to R$ *definida por:*

$$u(x) = \text{máx}\,\{\mu \geq 0 : x \in A(\mu)\}$$

es creciente, no acotada por encima, cuasicóncava y e *es la función de gasto asociada a* u *en el problema dual del consumidor.*

- El punto importante de este teorema es que establece condiciones para poder recuperar la función de utilidad de un consumidor con preferencias que satisfacen las propiedades típicas.
- En efecto, una vez recuperamos la función de utilidad, podemos resolver el PC y así obtener las demandas Marshallianas. Alternativamente, podemos utilizar el lema de Shephard utilizar el teorema de dualidad (proposición 4, item 3), invertir la función de gasto para obtener la función de utilidad indirecta y utilizando el lema de Roy diferenciar para obtener las demandas Marshalianas.
- La importancia del anterior resultado se puede apreciar del papel que juega en el siguiente teorema.

Teorema 13 (Integrabilidad) *Una función coninua* $x : R^L_{++} \times R_{++} \to R^L_+$ *es la demanda Marshaliana generada por una función de utilidad creciente y cuasicóncava si satisface la propiedad de presupuesto balanceado y la matriz de Slutsky asociada es simétrica y negativa semidefinida.*

Prueba. La idea de la prueba es:

1. Resolver (para $e\,(p, \mu)$) el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (que motiva el lema de Shephard):

$$x_i^h(p, \mu) = \frac{\partial e\,(p, \mu)}{\partial p_i}$$

2. Utilizar el anterior teorema de dualidad para recuperar la función de utilidad.

■

6.3. Resumen

- El problema de refutabilidad consiste en establecer condiciones (o reestricciones) en las escogencias de un consumidor, para las cuales no sea posible recuperar preferencias que satisfagan las propiedades usuales, tales que éstas sean consistentes con las escogencias observadas. En este caso se dice que la teoría es refutable. Esta es una condición necesaria, para poder considerar la teoría del consumidor que hemos desarrollado una teoría científica.

- Afortunadamente, la teoría del cosumidor es refutable. Esto será evidente cuando introduzcamos una aproximación alternativa a la teoría del consumidor basada en el axioma débil de preferencias reveladas.

- Más precisamente, la hipótesis de comportamiento en la teoría del consumidor es decir, que el agente maximiza una función de utilidad sujeto a su reestricción presupuestal, es refutable. Obsérvese que la hipótesis mencionda, no supone que la función de utilidad sea monótona ni cuasicóncava pues estas dos hipótesis no añaden reestricciones adicionales a la teoría (veáse [JR] sección 2.1.2). La idea es fundamentalemente la siguiente: supongamos que el comportamiento observado de escogencia de un agente es consistente con la hipótesis de comportamiento del consumidor con una función de utilidad continua (no necesariamente monótona y cuasicóncava), entonces se puede demostrar que existe una función de utilidad monótona y cuasiconcava tal que el comportamiento del cosumidor es consistente con el comportamiento observado.

- El problema de identificación en la teoría del consumidor consiste en determinar si, dadas unas escogencias observables, no existe más de una función de utilidad (que representan preferencias *distintas*) tales que el comportamiento de escogencia observado es consistente con ambas (a la luz de la teoría del consumidor). Por el momento dejaremos de lado este problema en el contexto de la teoría del consumidor y lo estudiaremos con detalle más adelante en el contexto de la teoría del equilibrio general.

7. Preferencias reveladas y la teoría del consumidor

- Una característica notoria de la teoría del consumidor desarrollada hasta este punto es que algunos elementos básicos de la teoría como son las preferencias de los individuos, no son observables.

- Una teoría alterna es la propuesta por Samuelson en su libro *Foundations of Economic Analysis* (1947).

- El punto de partida de esta teoría es el axioma débil de preferencias reveladas (WARP por sus siglas en ingles).

Axioma 1 (WARP) *Las escogencias de un consumidor satisfacen WARP si para todo par de escogencias* x_0, x_1, $x_0 \neq x_1$ *a precios* p_0, p_1 *respectivamente, se cumple:*

$$p_0 \cdot x_1 \leq p_0 \cdot x_0 \Rightarrow p_1 \cdot x_0 > p_1 \cdot x_1$$

- Intutivamente, si cuando los precios son p_0 y x_0, x_1 son ambos factibles pero el agente revela que prefiere (estrictamente) x_0 a x_1, entonces x_0 no puede ser factible cuando los precios son p_1.

- La siguiente figura muestra dos casos de obervaciones de precios y cantidades. En la primera figura las escogencias satisfacen WARP y en la segundo no.

- Refutabilidad de la hipótesis de comportamiento en la teoría del consumidor. Las escogencias de la figura (b) son inconsistentes con la hipótesis de comportamiento en la teoría del consumidor.

- Ahora investigamos si las escogencias que se derivan de un consumidor con preferencias Neoclásicas son consistentes con WARP.

Proposición 6 *Un consumidor con preferencias racionales y estrictamente convexas satisface WARP.*

Prueba. Suponga que se cumplen las hip'otesis de WARP entonces no puede ser verdad que x_1 sea preferible (débilmente) a x_0 pues por la convexidad estricta de las preferencia cualquier combinación convexa x_0 y x_1 seria factible cuando los precios son p_0 y estrictamente preferible a x_0, una contradicción. Luego x_0 debe ser estrictamente preferible a x_1 y por lo tanto no debe ser factible cuando los precios son p_1. Hemos usado que las preferencias son completas y estrictamente convexas. ■

- La consecuencias del axioma débil de preferencias reveladas pueden ser bastante fuertes. Por ejemplo, suponga que $x(p, y)$ denota una función de escogencia de un consumidor (no necesariamente una demanda Marshaliana, simplemente una función de precios e ingreso). Suponga además que satisface la propiedad de presupuesto balaceado, entonces se puede demosrar que la función de escogencia es homogénea de grado 0.
  Para demostrar esto sea $x^0 = x(p^0, y^0)$, $x^1 = x(tp^0, ty^0)$ entonces por la hipótesis de presupuesto balanceado se sigue que $x^1 p^0 = x^0 p^0$. Ahora por WARP, si $x^0 \neq x^1$ entonces $x^0 p^0 > x^1 p^0$.

- Adicionalmente, se puede demostrar que la matriz de Slutsky es semidefinida negativa.

- Si se pudiera demostrar que la matriz de Slutsky es simétrica habríamos demostrado que WARP y la propiedad de presupuesto balanceado son equivalentes a la teoría del consumidor. Sin embargo, para esto, es necesaria hacer una hipótesis ligeramente más fuerte que WARP. Esta se denomina el axioma fuerte de preferencia reveladas, $SARP$ por sus siglas en ingles[6].

Axioma 2 (SARP) *Las escogencias de un consumidor satisfacen SARP si para todo conjunto finito de escogencias* $(x^i, p^i)_{i=0,1,\ldots,n}$ *si* $x^i p^{i-1} \leq x^{i-1} p^{i-1}$, $x^{i-1} \neq x^i$, $i = 1, 2, \ldots n$ *entonces* $x^1 p^n \geq p^n x^n$

- Intutivamente, si cuando los precios son p_i y x_{i-1}, x_i son ambos factibles pero el agente revela que prefiere (estrictamente) x_i a x_{i-1}, entonces por transitividad x_1 no puede ser factible cuando los precios son p_i.
- SARP se cumple para preferencias racionales (completas y transitivas) y estrictamente convexas.
- El analísis anterior se basa en la posibilidad de observar una función de escogencia. Cuando nos restringimos a un conjunto finito de datos, los resultados análogos dependen del siguiente axioma que es una versión ligeramente más débil que SARP.

Axioma 3 (GARP) *Las escogencias de un consumidor satisfacen GARP si para todo conjunto finito de escogencias* $(x^i, p^i)_{i=0,1,\ldots,n}$ *si* $x^i p^{i-1} \leq x^{i-1} p^{i-1}$, $x^{i-1} \neq x^i$, $i = 1, 2, \ldots n$ *entonces* $x^1 p^n \geq p^n x^n$

- Intutivamente, si cuando los precios son p_i y x_{i-1}, x_i son ambos factibles pero el agente revela que prefiere (puede ser débilmente) x_i a x_{i-1}, entonces por transitividad x_1 no puede costar estrictamente menos que x_n cuando los precios son p_n.
- GARP se cumple para preferencias racionales localmente no saciadas (en particular para preferencias estrictamente convexas).
- El teorema de Afriat (1976) demuestra que todo conjunto de datos finito satisface GARP si y s'olo si existe una función de utilidad, localmente no saciable, continua, creciente y cóncava que racionaliza los datos. En este caso pueden existir muchas funciones de utilidad (que nos son transformaciones monótonas entre si) que racionalizan los datos.

[6] La implicación importante del SARP es que elimina la posibilidad de cíclos (preferencias no transitivas) en las escogencias de un consumidor.

8. Elección individual con incertidumbre

- En esta parte nos vamos a concentrar en el problema de decisión con incertidumbre desde un punto de vista muy básico. Es decir, vamos a volver a plantearnos el problema de decisión individual que abordamos al comienzo de las notas pero suponiendo que los agentes pueden tener cierta incertidumbre sobre el conjunto de alternativas.

- El concepto de incertidumbre tiene muchas dimensiones. Desde el punto de vista de la teoría de elección es importante diferenciar por lo menos dos formas de incertidumbre: objetiva (denominada comúnmente riesgo) y subjetiva. La incertidumbre de tipo objetivo está asociada a los casos en los que desconocemos el resultado futuro de cierto evento que afecta nuestra utilidad (y por lo tanto nuestras decisiones) pero conocemos la probabilidad con la que pueden suceder. Ejemplos típicos son un agente que se enfrenta a la decisión de apostar o no en ciertos juegos de azar (ruleta, máquinas, loterias, etc.). Por eso, este tipo de incertidumbre se denomian objetiva pues los agentes conocen o pueden deducir la distribución con la que suceden los eventos de interés. Decisiones en las que desconocemos la probabilidad de ocurrencia de lo eventos de interés y apenas tenemos una creencia sobre la ocurrencia de los mismos, se conoce como incertidumbre subjetiva. En estos casos incluso distintos agentes pueden tener creencias distintas sobre la ocurrencia de los eventos. Ejemplos típicos son una carreara de caballos o la casi infinidad de decisiones a las cuales se enfrentan los agentes económicos. Por ejemplo, decisiones sobre invertir en un proyecto depende de muchas contingencias macroeconómicas futuras o incluso, incertidumbre de tipo legal, regulatorio, etc. que afectan directamente la rentabiliadad de la inversión.

  El siguiente ejemplo pone de manifiesto la diferencia entre los conceptos de incertidumbre subjetiva y objetiva. En particular, el ejemplo sugiere que los individuos tiene cierta preferencia por loterias que se conozca su riesgo encompración a loterias que pagan mejores premios pero sobre las que existe cierta incertidumbre subjetiva.

  Ejemplo 16 (Paradoja de Ellsberg) *Una urna contiene 90 bolas donde 30 son rojas. El resto de las bolas son amarillas o negras y su distribución es desconocida. Algunas personas fueron sometidas a una apuesta. Apuesta A: Quien saque una bola roja gana una cantidad monetaria, las amarillas y las negras pierden. Apuesta B: Quien saque una bola amarilla gana, el resto pierde. La mayoría de las personas optan por la A. Después cambiamos las apuestas de una manera que en ambos casos, las bolas negras son desde ahora ganadoras. Apuesta C: Quien saque una bola roja o negra gana, las amarillas pierden. Apuesta D: Quien saque una bola amarilla o negra gana, las rojas pierden. En este caso, la mayoría de las personas escogen la D. Lo cual entra en contradicción con la desición* *anterior de escoger la apuesta A, a pesar de que la bola negra es ganadora en ambas C y D, lo cual no aporta diferencia alguna. Ellsberg explica éste resultado en términos de la diferencia entre el riesgo e incertidumbre. Las personas sometidas a estas escogencias suponen prudentemente que la distribución desconocida entre bolas rojas y amarillas pueden traerles desventaja y por lo tanto escogen en ambas ocasiones bajo el riesgo conocido (1/3 en la primera prueba, 2/3 en la segunda).*

- Esta sección se limita al estudio del primer tipo de incertidumbre sin embargo, existe una extensión un poco más compleja de la teoría que permite incomporar ambas forma de incertidumbre. La segunda forma de incertidumbre es la más importante para el estudio de la actividad económica. Hay que tener en cuenta que una parte importante de la inferencia estadística tiene como objeto modelar la incertidumbre de forma objetiva de tal forma que se aplique la teoría que se expone en esta sección. Un ejemplo importante es la teoría de selección óptima de portafolios que estudiaremos más adelante.

- Supongamos que tenemos un conjunto X de resultados posibles que también los llamaremos premios. Estas pueden ser candidatos presidenciales, canastas de consumo como en la teoría del consumidor, etc. Para simplificar vamos a suponer que tenemos un número finito de resultados: $X = \{x_1, ..., x_n\}$.

- Sea $P(X)$ el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre X (también denominado el conjunto de loterias simples). Esto es, un elemento p del conjunto $P(X)$, es una función $p : X \to [0,1]$, que llamaremos loteria (simple), tal que $\sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k) = 1$. Una forma de representar una distribución de probabiliad p sobre X es mediante el vector $p = (p_1, ..., p_n)$, donde p_i representa la probabilidad de obtener el premio x_i. Utilizaremos ambas representaciones de $P(X)$ de forma intercambiable.

- Dadas k loterias p^i, $i = 1, ...K$; e igual número de números reales α^k, $i = 1, ...K$ tales que $\alpha^k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^k = 1$ definimos una nueva loteria: $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^k p^k$.

- Supongamos que los agentes tienen preferencias $\succeq$ sobre $P(X)$ y definamos las siguientes loterias. Dado $x \in X$ definimos la loteria $\delta_x \in P(X)$ como que $\delta_x(x') = 1$ si $x' = x$ y cero de lo contrario.

- En resumen, vamos a modelar un consumidor mediante una estructura de escogencia de la forma $(P(X), \succsim, \mathcal{B})$ donde $P(X)$ es el nuevo espacio de escogencia, $\succsim$ es una relación binaria sobre $P(X)$ y $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de $P(X)$.

- Recordemos que en las primeras secciones cuando hablamos de teoría del consumidor introdujimos ciertos axiomas sobre las preferencias que económicamente eran plausibles y a partir de los cuales podíamos deducir resultados sobre el comportamiento de los agentes o caracterizar de forma más precisa las preferencias de estos. Por ejemplo, aprendimos que si las preferencias de un consumidor satisfacian ciertos axiomas como completititud, transitividad y continuidad, entonces es posible representar las preferencias mediante una función de utilidad.

- La definición de preferenicas racionales (es decir, completas y transitivas) es idéntica al caso sin incertidumbre luego no la vamos a repetir.

Axioma 4 (Continuidad) *Decimos que las preferencias son continuas si para todo $p, q, r \in P(X)$ los conjuntos:*

$$\{\lambda \in [0,1] : \lambda p + (1-\lambda)q \succeq r\}$$
$$\{\lambda \in [0,1] : r \succeq \lambda p + (1-\lambda)q\}$$

son cerrados.

- En primera instancia el anterior axioma tiene consecuencias aparentemente contradictorias. Por ejemplo, considere un conjunto de resultados de la forma: $X = \{\text{paseo en carro, quedarse en casa, accidente}\}$. Si la primera (i.e. la loteria que le asigna probabilidad uno al resultado paseo en carro) es estríctamente preferible a la segunda, la continuidad implica que una loteria que le asigna una probabilidad muy pequeña a tener un accidente junto con irse de paseo en carro, debe ser preferible a la alternativa de quedarse en casa.

- Los axiomas de racionalidad y continuidad garantizan la representabilidad de la relación de preferencias por una función de utilidad que denotaremos por $U : P(X) \to R$.

- El siguiente axioma es fundamental para el desarrollo de la teoría y también el más discutido y cuestionado sobre la base de observaciones del comportamiento en experimentos económicos.

Axioma 5 (Independencia) *La relación de preferencia $\succeq$ sobre $P(X)$ satisface el axioma de independencia si para todo p, q y $r \in P(X)$ y $\alpha \in [0,1]$ se cumple:*

$$p \succeq q \Leftrightarrow \alpha p + (1-\alpha)r \succeq \alpha q + (1-\alpha)r$$

- Este axioma no tiene un análogo en la teoría de elección con certidumbre.

Ejercicio 13 *Mostrar que el axioma de independencia es equivalente a para todo p, q y $r \in P(X)$ y $\alpha \in (0,1)$ se cumple:*

$$p \succ q \Leftrightarrow \alpha p + (1-\alpha)r \succ \alpha q + (1-\alpha)r$$

Teorema 14 *(von Nuemann y Morgenstern). Supongamos que $\succsim$ es una relación de preferencia $P(X)$ que satisface los axiomas de racionalidad, continuidad e independencia, entonces existe una función $u : X \to R$, que llamaremos la utilidad instantánea, tal que para todo par de loterias p, q sobre X :*

$$p \succsim q \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} p(x_k)u(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} q(x_k)u(x_k)$$

Más aún, si existe otra función $v : X \to R$ que representa a $\succsim$ como una utilidad esperada entonces existen $a > 0, b$ números reales tal que $v = au + b$.

- Obsérvese que la anterior desigualdad dice que la función $U : P(X) \to R$ definida por $U(p) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k)u(x_k)$ representa las preferencias $\succsim$. En efecto, este teorema no solo dice que si las preferencias satisfacen ciertos axiomas, estas son representable por una función de utilidad, sino que además dice que la representación tiene una forma muy particular porque $U(p)$ se puede expresar como

$$U(p) = E_p [u]$$

  donde $E_p [u]$ denota el valor esperado de la función u sobre X cuando las distribución de probabilidad sobre X es p. Por eso decimos que las preferencias tienen una representación en forma de utilidad esperada.

- Obsérvese que si U tiene una representación en forma de utilidad esperada entonces U es continua en $P(X)$. Más aún, tiene que satisfacer el axioma de independencia. Luego el teorema de Von Nuemann y Morgenstern establece exactamente el converso de las dos afirmaciones anteriores.

Ejercicio 14 *Sea $U : P(X) \to R$ una función que se puede representar como una utilidad esperada. Entonces las preferencias que U induce sobre $P(X)$ son continuas y satisfacen el axioma de independencia.*

- La última afirmación tiene como consecuencia que la representación en forma de utilidad esperada tiene un significado más que ordinal. En particular, las diferencias entre las utilidades de dos alternativas tiene un significado. Por ejemplo la afirmación la utilidad de p menos la utilidad de q es mayor que la diferencia entre r y s. Esta afirmación es equivalente a decir que una loteria es preferible a otra y la preferencia por una diferencia sobre otra no depende de la de la función de utilidad instantánea. Por ejemplo:

$$\frac{u(r) - u(q)}{u(q) - u(p)}$$

  es independiente de la representación utilizada.

Ejemplo 17 (Paradoja de Allais) *La paradoja de Allais (1953) es uno de los argumentos más fuertes que ponen en duda la representabilidad de las preferencias en forma de utilidad esperada (más precisamente, por el jercicio anterior, la validez del axioma de independencia). Supongamos que* $X = \{\$2{,}500{,}000, \$500{,}000.\$0\}$. *A un agente se le ofrecen las siguientes loterias:*

$$L_1 = (0, 1, 0),\ \ L_1' = (0{,}10, 0{,}89, 0{,}01)$$

y

$$L_2 = (0, 0{,}11, 0{,}89),\ \ L_2' = (0{,}10, 0, 0{,}90)$$

Las escogencia típicas frente a estas alternativas son: $L_1 \succ L_1'$ *y* $L_2' \succ L_2$. *Sin embargo estas escogencias son inconsistentes con la teoría de utilidad esperada. Para ver esto sean* $u_{2,5}$, $u_{0,5}$ *y* u_0 *las utilidades instantáneas de los tres premios. La primera escogencia implica:*

$$u_{0,5} > (0{,}10)\, u_{2,5} + (0{,}89)\, u_{0,5} + (0{,}01)\, u_0.$$

Si sumamos $(0{,}89)\, u_0 - (0{,}89)\, u_{0,5}$ *en ambos lados obtenemos* $L_2 \succ L_2'$ *una contradicción.*

Ejemplo 18 (Paradoja de Newcomb) *Considere el siguiente problema. Un ser muy inteligente (Dios) tiene la capacidad de pronósticar nuestra decisiones. Hay dos cajas. La caja uno tiene* 1,000 *pesos y la caja dos tiene un* 1,000,000 *de pesos o nada. Tenemos dos opciones. Tomar ambas cajas o tomar solamente la segunda caja. Si Dios pronóstica que vamos a escoger las dos cajas el pone cero pesos en la segunda caja. Si pronóstica que vamos a tomar únicamente la segunda caja entonces pone* 1,000,000 *de pesos. Si utilizamos algún mecanismo aleatorio para tomar la decisión no coloca nada en la segunda caja. Todo lo mencionado hasta este punto es conocimiento común. La pregunta es, qué debemos hacer?.*

La decisión con base en la teoría de juegos: Tomar ambas cajas es una estrategia dominante.

La decisión con base en la teorá de la utilidad esperada: Si Dios tiene una probabilidad alta de acertar sobre nuestra decisión entonces la alternativa que mayor utilidad esperada genera es tomar la segunda caja.

8.1. Premios monetarios

- Por simplicidad hemos desarrollado la teoría de elección individual con incertidumbre en el contexto de un conjunto de alternativas finitas. Con algunas condiciones adicionales es posible extender la teoría al caso de un conjunto de alternativas infinito. Un caso importante es cuando $X = R$. La interpretación más importante de este conjunto de alternativas es cuando éstas corresponden a niveles de ingreso monetario. En lugar de volver a construir todos los elementos de la teoría en estas circunstancias vamos hacer las siguietes hipótesis con el fin de simplificar la exposición y concentrarnos en lo verdaderamente nuevo e interesante de la extensión.

- Supongamos que $X = R$ y $u : R \to R$ es una función continua dos veces diferenciables. Sea $P(X)$ el conjunto de todas las distribuciones discretas sobre X con soporte finito. Esto es, supongamos que $p \in P(X)$ si y sólo si $p(x) = 0$ excepto para un número finito de elementos de x. En lo que resta de esta sección vamos a suponer que el agente tiene preferencias $\succeq$ representables por un función de utilidad $U : P(X) \to R$ definida por:

$$U(p) = \sum_{x \in X} p(x)u(x).$$

  Obsérvese que la sumatoria que define la función de utilidad está bien definida pues por definición $p(x) = 0$, excepto para un número finito de elementos de x.

Definición 9 *Decimos que $\succsim$ es estrictamente monótona si $x > y \Leftrightarrow \delta_x \succ \delta_y$.*

Ejercicio 15 *Mostrar que si $\succsim$ es estrictamente monótona entonces la función de utilidad (instantanea) u es estrictamente monótona.*

- Dada una loteria p denotamos por $\overline{p}$ el valor esperado de x con p. Es decir, $\overline{p} = \sum\limits_{x \in X} p(x)x$.

Definición 10 *Decimos que el agente es averso al riesgo si y sólo si $\delta_{\overline{p}} \succeq p$ para toda loteria p.*

Proposición 7 *Para todo $p \in P(X)$, $\delta_{\overline{p}} \succsim p$ si y sólo si u es cóncava.*

Prueba. Sean $x\acute{}$ y $x\acute{}$ dos premios arbitrarios y definamos $p = \alpha\delta_{x'} + (1-\alpha)\,\delta_{x''}$ entonces $\delta_{\overline{p}} \succeq p \Leftrightarrow u\,(\overline{p}) \geq \alpha u\,(x') + (1-\alpha)\,u\,(x'') \Leftrightarrow u$ es cóncava (ver figura). ■

- Luego el consumidor es averso al riesgo si y sólo si la función de utilidad instantanea es cóncava. Decimos que el agente es neutro al riesgo si $\delta_{\overline{p}} \sim p$ y que es amante del riesgo si $\delta_{\overline{p}} \preceq p$ para toda loteria p.

Ejercicio 16 *Mostrar que el agente es neutro (amante) al riesgo si y sólo si u es una función de utilidad instantánea lineal (convexa).*

Ejemplo 19 (Paradoja de San Petersburgo) *Este ejemplo pone de manifiesto que por lo menos en ciertas circunstancias es natural suponer que los agentes son aversos al riesgo. Consideremos el siguiente juego conocido como la paradoja de St. Petersburgo. Supongamos que nos ofrecen participar de un juego del siguiente tipo. Tiramos repetidamente una moneda (no sesgada) hasta que caiga cara. Mientras la moneda caiga sello, no recibimos ninguna compensación pero si cae cara en el n-ésimo lanzamiento recibimos un pago de 2^n unidades de dinero. Es fácil mostrar que el valor esperado de esta loteria es infinito. Ciertamente la mayoría de las personas a las cuales uno les propone este juego no estarían dispuestas a pagar una cantidad muy grande por comprar esta loteria* *(pues es probable que caiga cara muy rápido y por lo tanto no compense la inversión). Esto es paradójico pues el valor esperado del premio es infinito y sin embargo una persona común no estaría dispuesta a pagar mucho para participar de este juego. Luego, probablemente no es una buena hipótesis que los agentes valoran esta loteria según su pago esperado (como si fueran neutrales al riesgo). Supongamos ahora que el agente valora una cantidad de dinero x según su raíz cuadrada. Esto es, $u(x) = \sqrt{x}$. Si calculamos ahora el valor esperado de la loteria cuando el agente tiene esta función de utilidad instantánea, es fácil ver que este valor esperado es finito. Esto resuelve"la paradoja e insinua que un mejor modelo de las preferencias de los agentes es uno en el cual éstos son aversos al riesgo (i.e., función de utilidad instantánea cóncava).*

Ejercicio 17 *Verificar las afirmaciones hechas en el anterior ejemplo.*

Definición 11 *(Equivalente determinístico). Dada una loteria p definimos el equivalente determinístico como un $x_p \in X$ tal que $\delta_{x_p} \sim p$ y la prima de riesgo y_p como $y_p = \overline{p} - x_p$.*

Ejercicio 18 *Mostrar que un agente es averso al riesgo si y sólo si para todo p, $y_p \geq 0$.*

- Intuitivamente, para un agente averso al riesgo, la prima de riesgo es el ingreso adicional sobre el equivalente determinístico de una loteria que hay que prometerle al agente para que éste sea indiferente entre el equivalente determinístico más la prima o el valor esperado de la loteria con certeza.

- Como vimos en una de las proposiciones anteriores, la concavidad de la función de utilidad esta relacionada con la aversión al riesgo. Es posible ir un poco más lejos y cuantificar qué tan averso al riesgo es un agente si suponemos que su función de utilidad instantánea es dos veces diferenciable. La siguiente definición introduce el concepto de coeficiente de aversión al riesgo.

Definición 12 *Un agente A es más averso que un consumidor B (con preferencias $\succeq_A$ y $\succeq_B$ respectivamente) si para toda p:*

$$x_p^A \leq x_p^B$$

Proposición 8 *Un agente A es más averso que un consumidor B si y sólo si:*

$$-\frac{u_A''(x)}{u_A'(x)} \geq -\frac{u_B''(x)}{u_B'(x)}$$

La cantidad $-\frac{u_A''(x)}{u_A'(x)}$ la llamamos el coeficiente de aversión al riesgo (absoluto) de Arrow y Pratt en x y lo denotamos por $\sigma_A(x) = -\frac{u_A''(x)}{u_A'(x)}$.

Prueba. Vamos a demostrar únicamente que si para todo x, $\sigma_A(x) \geq \sigma_B(x)$ entonces A es más averso al riesgo que B.

Sean u y v las funciones de utilidad instantáneas de cada consumidor. Supongamos que son estrictamente crecientes y definamos la función $h = u(v^{-1})$. Es fácil demostrar que h es estrictamente creciente y, si $\sigma_A(x) \geq \sigma_B(x)$, entonces h es cóncava. Ahora:

$$\begin{aligned} u(x_p^A) &= E_{\delta_{x_p^A}}[u] = E_p[u] = E_p[h(v)] \\ &\leq h(E_p[v]) = h(E_{\delta_{x_p^B}}[v]) \\ &= h(v(x_p^B)) = u(x_p^B) \end{aligned}$$

luego $x_p^A \leq x_p^B$. ■

- Obsérvese que esta es una medida de la concavidad de la función de utilidad (instantánea).
- La medida de aversión al riesgo e Arrow y Pratt es un invariante de las preferencias debido a la unicidad (excepto por transformaciones afines) de la representación en forma de utilidad esperada.
- Dedicamos el resto de esta sección a dos aplicaciones muy importantes: la demanda por seguros y la selección de portafolios financieros.

8.2. Aplicación: Selección óptima de portafolio

Vamos a introducir muy brevemente el problema de selección óptima de portafolio cuando los agentes sólo tienen preferencias por el valor esperado y volatilidad de un portafolio. Este es el análisis clásico de Markowitz de media - varianza por el cual obtuvo el premio nobel en 1990.

- Sea $X = R$ y $P(X)$ el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad discretas sobre X con con soporte finito.
- Supongamos que la utilidad instantánea del agente es: $u(x) = x - \frac{a}{2}x^2$ para $x \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$.
- Vamos a considerar el caso más simple en el que solo existen dos activos para invertir. Denotamos los retornos de estos dos activos por r_1 y r_2 (que suponemos sólo pueden tomar un número finito de valores diferentes) y denotamos por p la distribución conjunta r_1 y r_2. Sea μ_1 y μ_2 el retorno esperado de cada uno de los activos y Σ la matriz de varianza covarianza.[7]

[7]Más adelante vamos a ver que lo único que realmente necesitamos conocer para plantear el problema formalmente son los retornos esperados y la matriz de varianza covarianza. La teoría estadística permite estimar la distribución conjunta de los dos retornos de donde se pueden estimar los retornos esperados y matriz de varianza covarianza. Alternativamente, y bajo ciertas hipótesis, se puede estimar directamente los retornos esperados y la matriz de varianza covarianza con base en los datos observados.

- Sea $B(r_1, r_2) = \{p \in P(X) : p \sim r = \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2,\ \alpha \in R\}$. Es decir, $B(r_1, r_2)$ consiste de las distribuciones de probabilidad de todos los portafolios que se pueden construir a partir de los activos r_1 y r_2 en donde α es la proporción del ingreso que se invierte en el primer activo y $1-\alpha$ en el segundo. Obsérvese que se permiten ventas al descubierto (*short selling*).

- El problema de selección óptima de portafolio es:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{x \in X} p(x)(x - \frac{ax^2}{2}) \\ & s.a \\ p \quad \in \quad & B(r_1, r_2) \end{aligned}$$

- Obsérvese que la función objetivo implica que el agente sólo le importa la media y la varianza del portafolio p: la función objetivo se puede expresar como $\mu_p - \frac{a}{2}\mu_p^2 - \frac{a}{2}\sigma_p^2$, donde μ_p es el valor esperado y σ_p^2 es la varianza, respectivamente, de p.

Ejercicio 19 *Grafique en un plano $\sigma - \mu$ las curvas de indiferencia del inversionista.*

- Ahora, si calculamos el retorno esperado y la media y varianza de todos los elementos de $B(r_1, r_2)$ estos se pueden representar en el plano $\sigma - \mu$ y, usualmente (dependiendo de la correlación entre los dos activos), se obtiene una hipérbola.

Ejercicio 20 *Grafique en un plano $\sigma - \mu$ el conjunto de portafolios factibles ($B(r_1, r_2)$).*

Ejercicio 21 *Demuestre que el retorno esperado de cualquier portafolio de la forma $r = \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2$ es:*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

y que su varianza es:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

Finalmente muestre que en el plano $\sigma - \mu$ los elementos de $B(r_1, r_2)$ se pueden representar como en la figuras descritas arriba.

Ejercicio 22 *Considere dos activos con las siguientes distribuciones de probabilidad (marginales):*

Probabilidad	r_1	r_2
0,4	−10 %	20 %
0,2	0 %	20 %
0,4	20 %	10 %

matriz de varianza covarianza:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0{,}0184 & -0{,}96309 \\ -0{,}96309 & 0{,}0024 \end{bmatrix}$$

y supongamos que $u(x) = x - \frac{0{,}1x^2}{2}$.

1. *Dibujar las curvas de indiferencia del inversionista y el conjunto de portafolios factibles en el plano* $\sigma - \mu$.
2. *¿Existe una solución al problema del inversionista? Si sí existe, calcular el portafolio óptimo del inversionista.*

Ejercicio 23 *Supongamos que no se permiten ventas al descubierto. Es decir* $B(r_1, r_2) = \{p \in P(X) : p \sim r = \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2,\ \alpha \in [0,1]\}$. *Demostrar que la varianza de cualquier portafolio en* $B(p_1, p_2)$ *es menor o igual a la varianza de cualquier portafolio consistente de un solo activo. Ayuda: distinguir entre dos casos que son completamente análogos. Suponga que la varianza de una activo es menor o igual que la varianza del otro.*

8.3. Aplicación: Selección óptima de portafolios el caso general

- Sea $L_t(\lambda, X_t)$ el proceso de perdidas de un portafolio $\lambda = (\lambda_1, ...\lambda_d)$ de d instrumentos financieros, $q = (q_1, ...q_d)$ el vector de precios en t de cada instrumento y $X_t \in R^p$ los factores de riesgo.
- $L_t(\lambda, X_t)$ denota la pérdida entre $t-1$ y t y se define como $L_t(\lambda, X_t) = -(V_t(\lambda, Z_{t-1} + X_t) - V_{t-1}(\lambda, Z_{t-1}))$
- Por simplicidad asumimos que $L_t(\lambda, X_t)$ no depende explícitamente del tiempo.
- Sea $\Lambda \subset R^d$ el conjunto de portafolio admisibles. Por ejemplo, si q es el precio de actvos y el costo total del portafolio puede ser a lo sumo V, entonces:

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in R^d : \sum_{i=1}^{d} \lambda_i q_i = V \right\}$$

  Obsérvese que el precio de algunos o todos los activos puede ser cero (este es el caso cuando los instrumentos son contratos forward). Si no se permiten ventas descubiertas entonces:

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in R^d : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

  En general,el conjunto de restricciones podría incluir cotas inferiores y superiores a los portafolios admisibles (i.e., *box constraints*).

- Sea $\beta \in R$ un nivel de tolerancia (exposición máxima al riesgo). Este puede ser impuesto por políticas de inversión con la que debe cumplir el inversinionista. De otra parte las preferencias del inversionista, que incluyen su actitud frente al riesgo, serán modeladas a través de su función de utilidad.
- Denotemos por ϱ una medida de riesgo cualquier. Es decir, dado $L_t(\lambda, X_t)$ y $F_{X_{t+1}}$ o $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$, la distribución no condicional o condicional de X_t, $\varrho(L_{t+1}(\lambda, X_{t+1})) \in R$ es una medida del riesgo del portafolio λ. Por ejemplo ϱ puede ser $VaR_{t,\alpha}$ o $ES_{t,\alpha}$.
- Supongamos que el inversionista tiene preferencias sobre un conjunto de variables aleatorias de la forma $R_t(\lambda, X_t)$. Estas representan los premios para el inversionista de tener un portafolio λ cuando los factores de riesgo son X_t.

Ejemplo 20 (Premios) *El inversionista puede tener preferencias por:*

1. *Riqueza final:* $R_t(\lambda, X_t) = -L_t(\lambda, X_t) + V_{t-1}(\lambda, Z_{t-1})$.
2. *Ganancia:* $R_t(\lambda, X_t) = -L_t(\lambda, X_t)$.
3. *Retorno:* $R_t(\lambda, X_t) = -\frac{L_t(\lambda, X_t)}{V_{t-1}(\lambda, Z_{t-1})}$.

- El objetivo ahora es definir la función objetivo del inversionista. Por el momento nos vamos concentrar en objetivos derivados de la teoría de la utilidad esperada (teoría de la decisión).

- Supongamos que el inverisionista tiene preferencias sobre las variables aleatorias $R_t(\lambda, X_t)$ y que estas se pueden representar en forma de utilidad esperada. Sea $u : R \longrightarrow R$ la función de utilidad de von Neumann y Morgenstern que las representa.

- La función objetivo del inversionista es:

$$E_t[u(R_{t+1}(\lambda, X_{t+1}))]$$

donde E_t denota el valor esperado con respecto a $F_{X_{t+1}}$ o $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$.

- La función objetivo de un inversionista mide la satisfacción o beneficio en términos de utilidades, un concepto que no tiene significado cardinal. Un alternativa es representar las variables aleatorias: $u(R_{t+1}(\lambda, X_{t+1}))$ por su equivalente determinístico. Definimos el equivalente determinístico de $u(R_{t+1}(\lambda, X_{t+1}))$ como un $CE_t(\lambda) \in R$ tal que satisface:

$$u^{-1}\left(E_t[u(R_{t+1}(\lambda, X_{t+1}))]\right)$$

Obsérvese que: $u(CE_t(\lambda)) = E_t[u(CE_t(\lambda))] = E_t[u(R_{t+1}(\lambda, X_{t+1}))]$. Intuitivamente, $CE_t(\lambda)$ es el premio determinístico tal que el agente es indiferente entre $R_{t+1}(\lambda, X_{t+1})$ y $CE_t(\lambda)$.

- Obsérvese que $CE_t(\lambda)$ depende de u, R_{t+1} y X_{t+1} pero por simplicidad solo resaltamos la dependencia de λ.

Ejemplo 21 *Sea* $u(x) = -e^{-\frac{1}{\zeta}x}$ *y* $\phi(\lambda) = E_t[u(R_{t+1}(\lambda, X_{t+1}))]$. *Entonces*

$$CE_t(\lambda) = \zeta \ln(\phi(XXX)) u^{-1}\left(E_t[u(R_{t+1}(\lambda, X_{t+1}))]\right)$$

8.4. Problema estándar de optimización de portafolios

- El problema general de optimización es:

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in \Lambda} E_t[u(R_{t+1}(\lambda, X_{t+1}))] \\ & s.a \\ \varrho(L(\lambda, X_{t+1})) \quad \leq \quad & \beta \end{aligned}$$

E_t es el valor esperado con respecto a $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ o $F_{X_{t+1}}$.

Nota técnica 2 *Como mencionamos anteriormente la segunda restricción se deriva de restricciones impuestas exógenamente por un regulador o políticas de riesgo con las que debe cumplir el inversionista.*

Nota técnica 3 *Una restricción adicional de interes es introducir costos de transacción. Una forma conveniente es suponer que los costos se pueden escribir de la forma:*

$$\Gamma(\lambda, \lambda) = k\,|\lambda - \lambda|$$

donde k es una constantes no negativa.

Ejemplo 22 (Equivalente determinístico) *Supongamos que el problema de selección óptima de portafolio se plantea como:*

$$\begin{aligned} &\max_{\lambda \in \Lambda_V} CE(\lambda) \\ VaR_\alpha L(\lambda) &\leq \beta \end{aligned}$$

Este problema tiene una solución cerrada. Véase Meucci [2007], página 311.

- La teoría de media varianza de Markovitz, de donde se deduce la frontera de eficiencia de un conjunto de instrumentos, corresponde al caso en el que la medida de riesgo es la desviación estándar y la función objetivo es el retorno.

- Sea $R_t(\lambda, X_t) = \frac{\lambda^T}{V_{t-1}} X_t = w^T X_t$ donde w_t representa los pesos en cada instrumento y X_t representan el retorno de d instrumentos financieros.[8] Luego $R_t(\lambda, X_t)$ representa el retorno del portafolio. Supongamos que la medida de riesgo es la volatilidad y sea, $\beta = \overline{\sigma}^2$ la volatilidad máxima tolerable. Supongamos que la distribución condicional o no condicional de X_{t+1} es, $X_{t+1} \sim N(\mu_{t+1}, \Sigma_{t+1})$.

- El problema de selección óptima de portafolio es:

$$\begin{aligned} &\max w^T \mu_{t+1} \\ &s.a \\ w^T \mathbf{1} = 1 & \\ w^T \Sigma_{t+1} w &\leq \overline{\sigma}^2 \end{aligned}$$

  El dual de este problema es:

$$\begin{aligned} &\min w^T \Sigma_{t+1} w \\ &s.a \\ w^T \mathbf{1} = 1 & \\ w^T \mu_{t+1} &\geq \overline{\mu} \end{aligned}$$

[8] Obsérvese que esta formulación no permite que la riqueza inicial, o valor del portafolio sean cero.

donde $\overline{\mu}$ es valor máximo del problema original. Obsérvese que μ_{t+1} y Σ_{t+1} son conocidas en t. Por simplicidad en la notación vamos a escribir $\mu = \mu_{t+1}$ y $\Sigma = \Sigma_{t+1}$

- Es más fácil de parametrizar la solución al problema dual. Esta es:

$$\overline{w} = \frac{B\Sigma^{-1}\mathbf{1} - A\Sigma^{-1}\mu + \overline{\mu}(C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}\mathbf{1})}{D}$$

donde $A = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mu$, $B = \mu^T\Sigma^{-1}\mu$, $C = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$ y $D = BC - A^2$ y

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{B - 2\overline{\mu}A + \overline{\mu}^2 C}{D}$$

- La menor varianza esperada posible del portafolio eficiente $\overline{\sigma}^2_{\text{mín}}$, el retorno esperado $\overline{\mu}_{\text{mín}}$ y los pesos correspondientes son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}^2_{\text{mín}} &= \frac{1}{C} \\
\overline{\mu}^2_{\text{mín}} &= \frac{A}{C} \\
w_{\text{mín}} &= \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{C}
\end{aligned}$$

- Se puede demostrar que si w son los pesos de un portafolio sobre la frontera de eficiencia, entonces:

$$cov(w^T X_{t+1}, w^T_{\text{mín}} X_{t+1}) = \frac{1}{C}$$

Ejemplo 23 *Este problema no tiene una solución explícita cuando no se permiten ventas descubiertas (i.e. $w \geq 0$). Sin embargo, la geometría del problema es similar.*

Ejemplo 24

Una reinterpretación del modelo de media - varianza es la siguiente. Considere el problema:

$$\max_{w^T\mathbf{1}=1} E_t\left[u\left(w^T X_{t+1}\right)\right]$$

donde $u(x) = a - \frac{b}{2}x^2$. este caso supone que el inversionista no enfrenta ninguna restricción de riesgo exógena. Sin embargo, su función de utilidad internaliza el riesgo y es fácil ver que para cierta parametrización de la función de utilidad, el problema anterior es equivalente al problema de media - varianza.

- Si en el modelo anterior de media - varianza introducimos un activo libre de riesgo con rentabilidad R_t^f entonces la frontera de eficiencia del nuevo universo de activos es una linea recta (permitiendo ventas descubiertas). Esta línea se denomina la línea del mercado de capitales. El portafolio de tangencia se conoce como el portafolio del mercado. En este contexto es fácil deducir el teorema de sepración de un fondo. Esto es, la frontera de eficiencia es una linea recta tangente a la frontera de eficiencia (de los activos sin el activo libre de riesgo). El resultado es ligeramente distinto cuando no se permiten ventas descubiertas.

- Obsérvese que la identificación del portafolio de tangencia con un portafolio de mercado supone: (1) Agentes con las misma expectativas y (2) Todos los agentes escogen portafolios sobre la frontera de eficiencia.

8.5. Aplicación: Demanda de seguros

- Tenemos un individuo con función de utilidad u, averso al riesgo y riqueza inicial w.
- La probabilidad de accidentarse es $\pi \in [0, 1]$ y son idependientes (no se estrellan entre ellos ni hay algún tipo de factor común que induce estrellarse).
- La pérdidad en caso de accidente es L.
- La compañía de seguros le ofrece una poliza cuya prima es ρ por unidad asegurada.
- Si la prima es actuarialmente justa (el valor esperado de la ganacia para la aseguradora es cero) entonces por cada unidad asegurada en la economía:

$$\pi(\rho - 1) + (1 - \pi)\rho = 0$$

  de donde se deduce $\rho = \pi$.
- Suponga que el agente puede escoger el nivel de aseguramiento $x \in [0, L]$.
- Si la prima es actuarialmente justa, ¿cuál es su nivel de aseguramiento óptimo?
- El agente maximiza su utilidad esperada:

$$(1 - \pi)u(w - \pi x) + \pi u(w + x - \pi x - L)$$

  derivando con respecto a x y bajo el supuesto de aversión al riesgo ($u'' < 0$) se obtiene $x = L$.
- En conclusión: el agente se asegura completamente.

9. Teoría de la firma

- Un plan de producción (neto) de L bienes es un vector $y \in R^L$. Valores positivos denotan productos y valores negativos denotan insumos.

- Una firma la caracterizan los planes de producción que son tecnológicamente posibles. Denotamos este conjunto de producción o conjunto de capacidades tecnológicas por $Y \subset R^L$.

- Es importante resaltar que el conjunto de capacidades tecnológicas no hace referencia a la disponibilidad de recursos, sólo a las posibilidades tecnológicas.

- Comúnmente este conjunto se describe mediante una función de transformación $F : R^L \to R$ tal que:

  1. $Y = \{y \in R^L : F(y) \leq 0\}$.
  2. $F(y) = 0$ si y sólo si y está en el borde de Y.

  El conjunto $\partial Y = \{y \in R^L : F(y) = 0\}$ se conoce como la frontera de transformación o la frontera de posibilidades de producción.

- Si F es diferenciable y y es un plan de producción en ∂Y definimos la tasa marginal de transformación entre los commodities l y k, $MRT_{l,k}(y)$ como:

$$MRT_{l,k}(y) = \frac{\partial F / \partial y_l}{\partial F / \partial y_k}$$

  Esto corresponde al valor absoluto de la pendiente de la recta tangente a la frontera de transformación en y.

  - Las siguientes son las propiedades más importantes que se suelen suponer del conjunto de capacidades de producción. No todas ellas son compatibles.

  1. No vacio.
  2. Es un conjunto cerrado en R^L.
  3. No hay arbitrage: $Y \cap R^L_+ \subset \{0\}$.
  4. Posibilidad de parar: $0 \in Y$.
  5. Libre disposición: Si $y \in Y$, $y' \leq y$ entonces $y' \in Y$.
  6. Retornos de escala no crecientes: Si $y \in Y$ entonces para todo $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha y \in Y$.
  7. Retornos de escala no decrecientes: Si $y \in Y$ entonces para todo $\alpha \geq 1$, $\alpha y \in Y$.
  8. Retornos constantes de escala: si se cumplen (6) y (7). Geométricamente Y es un cono.

9. Aditividad o entrada libre: Si $y \in Y$ y $y' \in Y$ entonces $y + y' \in Y$. La interpretación como entrada libre se refiere al caso en el que Y es el conjunto de posibilidades de producción agregado de la economía. Si una firma incumbente puede producir $y \in Y$ y una firma entrante $y' \in Y$, entonces se debe poder producir $y + y' \in Y$ (no hay interferencia).
10. Convexidad: Y es convexo. Si la tecnología permite parar entonces la convexidad implica retornos no crecientes de escala.
11. Cono convexo: Retornos constantes de escala y convexidad.

Proposición 9 *El conjunto de posibilidades de producción es aditivo y satisface la propiedad de retornos no crecientes de escala si y sólo si es es un cono convexo.*

- Cuando la firma produce un único bien es común describir su tecnología utilizando una función de producción $f : R_+^{L-1} \to R$ tal que si $(x_1, ..., x_{L-1}) \in R_+^{L-1}$ denota los insumos de producción, entonces $f(x_1, ..., x_{L-1})$ denota la máxima cantidad que se puede producir con esos insumos. Luego el conjunto de capacidades tecnológicas de la firma se puede describir mediante la siguiente función de transformación:

$$Y = \{(-x_1, ..., -x_{L-1}, y) \in R^L : x_l \geq 0,\ y \leq f(x_1, ..., x_{L-1})\} \tag{1}$$

Obsérvece que la función de transformación se puede definir como $F(x_1, ..., x_L) = x_L - f(-x_1, ..., -x_{L-1})$.

La tasa marginal de sustitución técnica se define como:

$$MRTS_{l,k}(x) = \frac{\partial f / \partial x_l}{\partial f / \partial x_k}$$

- Para el caso de un solo producto, las propiedades sobre el conjunto de posibilidades tecnológicas se traducen fácilmente en propiedades sobre la función de producción que lo define. Por ejemplo, la tecnología es convexa si sólo si la función de producción es cóncava.

Ejemplo 25 *La función de producción CES homogénea de grado uno para el caso de dos insumos se define como:*

$$y = (\alpha x_1^\rho + (1 - \alpha) x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

donde $\rho < 1,\ \rho \neq 0$.

Ejercicio 24 *Este ejercicio muestra que la función de producción CES generaliza las funciones de producción lineal* $(\rho = 1)$*, Leontieff* $(\rho \to -\infty)$ *y Cobb - Douglas* $(\rho = 0)$.

1. *Calcular el límite cuando $\rho \to -\infty$ y mostrar que converge a la función de producción de Leontieff:*

$$y = \min\{x_1, x_2\}$$

2. *Calcular el límite cuando $\rho \to 0$ y mostrar que la función converge a la función de producción Cobb - Douglas:*

$$y = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

   Obsérvese que cuando $\rho \to 0$ el término $\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho}$ tiende a 1 y $\frac{1}{\rho}$ tiende a infinito luego la convergencia no está bien definida. Esto sugiere utilizar algún tipo de transformación que lleve a las formas indefinidas de calcular límites donde se puede aplicar la regla de L´Hopital. Ayuda: calcular el logarítmo en ambos lados.

Ejercicio 25 *De forma más general podemos definir la función de producción CES homogénea de grado uno para el caso de dos insumos como:*

$$y = \left(\alpha\left(\beta x_1\right)^{\rho} + (1-\alpha)\left((1-\beta)x_2\right)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

donde $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

1. *Calcular el límite cuando $\rho \to -\infty$ y mostrar que converge a la función de producción de Leontieff:*

$$y = \min\{\beta x_1, (1-\beta)x_2\}$$

2. *Calcular el límite cuando $\rho \to 0$ y mostrar que la función converge a la función de producción Cobb - Douglas:*

$$y = Bx_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

   donde B es una constante.

Ejercicio 26 *Dada una función de producción f, definimos la elasticidad de sustitución $\sigma_{i,j}$ entre los insumos i, j como:*

$$\sigma_{i,j} = \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}} \frac{\frac{f_i(x)}{f_j(x)}}{d\left(\frac{f_i(x)}{f_j(x)}\right)}$$

donde f_i y f_j son los productos marginales de cada insumo.

Un caso fácil de calcular la esta elasticidad es cuando $\frac{f_i(x)}{f_j(x)}$ se puede expresar como una función de $\frac{x_j}{x_i}$. En este caso:

$$\sigma_{i,j} = \frac{\frac{f_i(x)}{f_j(x)}}{\frac{x_j}{x_i}} \left(\frac{d\left(\frac{f_i(x)}{f_j(x)}\right)}{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}\right)^{-1}$$

Demostrar que la elasticidad de sustitución la función de producción CES es constante e igual a $\frac{1}{1-\rho}$. Luego la elasticidad de sustitución de la la función de producción lineal es ∞, la de la función de producción Leontieff es 0 y la elasticidad de sustitución de la función de producción Cobb-Douglas es 1.

Definición 13 (Retornos de escala) *Una función de producción:*

1. *Tiene retornos constantes de escala si $f(tx) = tf(x)$ para todo $t > 0$.*
2. *Tiene retornos crecientes de escala si $f(tx) > tf(x)$ para todo $t > 1$.*
3. *Tiene retornos decrecientes de escala si $f(tx) < tf(x)$ para todo $t < 1$.*

Ejercicio 27 *Muestre que con las modificaciones obvias a las definiciones dadas anteriormente de tecnologías no decrecientes, no crecientes y con retornos constantes de escala la función de producción tiene las propiedades de la definición anterior.*

- Un resultado interesante para varificar si una función es cóncava (tecnología convexa) es el siguiente lema de Shephard.

Lema 1 (Shephard) *Si una función de producción es continua, estrictamente creciente, estrcitamente cuasicóncava, $f(0) = 0$ y es homegénea de grado 1 entonces es cóncava.*

9.1. Maximización del beneficio

- En esta seción vamos a suponer que las firmas tienen como objetivo maximizar su beneficio (esta hipótesis no es completamente obvia ya que debería de deducirse de los objetivos de los dueños de firma). Bajo ciertas circunstancias es posible mostrar que este es el caso en una firma de propiedad privada.
- Sea $p \in R^L_{++}$ el vector de precios de los L commodities.
- Suponemos que el conjunto de posibilidades de producción de la firma es no vacio, cerrado y satisface la propiedad de libre disposición.
- El problema de maximización de beneficios es:

$$\begin{aligned} & \max p \cdot y \\ & s.a \\ y \in & \; Y \end{aligned}$$

- Definimos la función valor de este problema como la función de beneficio $\pi(p)$ y la correspondencia de oferta $y(p)$ como el conjunto de vectores que resuelven el problema de maximización del beneficio.

- Obsérvese que el conjunto de posibilidades de producción satisface la propiedad de retornos no crecientes de escala entonces $\pi(p) \leq 0$ o $\pi(p) = \infty$.

Proposición 10 *Algunas propiedades de la función de beneficios. Con las hipótesis anteriores sobre Y (conjunto no vacio, cerrado y satisface la propiedad de libre disposición):*

1. *π es homogénea de grado uno.*
2. *π convexa.*
3. *y es homogénea de grado cero.*
4. *Si Y es convexo entonces y es una correspondencia convexa. Si Y es estrictamente convexo entonces y es una función (cuando no es vacia).*
5. *Lema de Hotelling: Si $y(p)$ es un solo punto entonces π es diferenciable y $\nabla\pi(p) = y(p)$.*
6. *Ley de la oferta: Si y es una función diferenciable en p entonces:*

$$\nabla y(p) = \nabla^2\pi(p)$$

   es simétrica y positiva semidefinida. Además, $\nabla y(p) \cdot p = 0$

- Obsérvese que la ley de la oferta se cumple para insumos y productos. Además, la ley de la oferta es independiente del nivel de precios, siempre se cumple, pues en este caso no existe un efecto ingreso (no hay reestricción presupuestal).

- Agregación: Supongamos que existen un número finito de firmas cada una con una tecnología no vacia, cerrada y que satisface la propiedad de libre disposición. Es obvio como definir un conjunto de posibilidades agregado. Ahora, el resultado importante que podemos interpretar como un resultado de descentralización del proceso productivo bajo competencia perfecta es, para todo $p >> 0$:

   1. La función de beneficio de la tecnología agregada es la sumas de las funciones de beneficio.
   2. La correspondencia de planes de producción óptimos agregada es la suma de las correspondencias de planes de producción óptimos.

- Eficiencia: El concepto de eficiencia será un tema central y recurrente en la teoría del equilibrio general. Un concepto básico es el siguiente.

Definición 14 (Eficiencia productiva) *Un plan de producción $y \in Y$ es eficiente si no existe $y' \in Y$, $y' \neq y$ tal que $y' \geq y$.*

- Obsérvese que este concepto de eficiencia asociado una tecnología específica. Por eso podríamos decir que es un concepto de eficiencia a nivel privado.

- Un resultado importante que sirve como antesala a uno de los resultados más importantes de la teoría económica, el primer teorema de la economía del bienestar, es la siguiente proposición que puede interpretarse como una versión de éste.

Proposición 11 (Maximización del beneficio y eficiencia productiva) *Si $y \in Y$ es un plan de producción óptimo para algún $p >> 0$ entonces y es eficiente.*

Prueba. Por contradicción. ■

- El converso de este resultado es parcialmente cierto cuando la tecnología es convexa (afirma la existencia de un $p \geq 0$). El converso es cierto en el caso de la tecnología del modelo de actividad lineal). Estos resultados son versiones del segundo teorema fundamental de la economía del bienestar.

- Objetivos de la firma: mencionamos al comienzo que los objetivos de la firma no son completamente claros en algunas circunstancias. Sin embargo, en una economía de propiedad privada es fácil mostrar que, bajo ciertas circunstancias, el objetivo de maximización de beneficios está alineado con el de maximizar la utilidad de los agentes. Resaltamos algunos de los supuesto necesarios: competencia perfecta, los beneficios no son inciertos y el gerente de la firma puede ser controlado por los dueños de la misma.

9.2. Minimización de costos

- En lo que resta de esa sección vamos a concentrarnos en el caso de un solo bien de producción.

- Sea w el precio de los insumos y y el nivel de producción.

- El problema de minimización de costos (cuando sólo hay un bien de producción) es:

$$\begin{aligned} c(w, y) &= \min_{x \geq 0} w \cdot x \\ & \quad s.a \\ f(x) &\geq y \end{aligned}$$

- La función $c(w, y)$ se conoce como la función de costos condicionales.

- Los insumos que resuelven el problema se llaman la correspondencia de demanda de insumos óptimos.

- Obsérvese la analogía con el problema de minimización del gasto en la teoría del consumidor.

- Si suponemos que la solución al problema de minimización de costos es interior ($x >> 0$), las condiciones de primer orden implican que las tasa marginal de sustitución técnica es igual a los precios relativos de los insumos.

Proposición 12 *Bajo las mismas hipótesis del conjunto de posibilidades de producción de la proposición anterior, la función de costos satisface:*

1. *c es homogénea de grado uno en w y no decreciente en y.*

2. *c es cóncava en w.*

3. *Lema de Shephard: Cuando la correspondencia de demanda es una función, $\nabla_w c(w, y) = x(w, y)$.*

4. *Si f es cóncava entonces c es convexa en y (en particular, los costos marginales son no decrecientes en y).*

Prueba. Vamos a demostrar únicamente la cuarta afirmación. Sea z y z' tales que $c(w, q) = w \cdot z$ y $c(w, q') = w \cdot z'$. Ahora, como z y z' son planes de producción que permiten producir como mínimo q y q' respectivamente se sigue de la concavidad de f que $tz + (1-t)z'$ es un plan de producción que premite producir como mínimo $tq + (1-t)q'$. Por lo tanto $c(w, tq + (1-t)q') \leq w \cdot (tq + (1-t)q') = tw \cdot z + (1-t)w \cdot z' = tc(w, q) + (1-t)c(w, q')$. ■

El problema de la firma que hemos planteado en el curso supone que existe competencia perfecta en el mercado de insumos y el bien final. Adicionalmente, cuando resolvemos el problema de la firma encontramos el nivel óptimo de insumos y producción (escala de operación). En contraste, el problema de minimización de costos que hemos estudiado supone únicamente que hay competencia perfecta en el mercado de insumos y cuando lo resolvemos el resultado final es una demanda condicional de insumos. En efecto, la solución del problema es condicional al nivel de producción seleccionado. Nótese que el problema de minimización de costos hace sentido aún cuando existe competencia imperfecta en el mercado del bien final. Esto sugiere que si minimizamos costos, si suponemos competencia perfecta en el mercado del bien final y si escogemos la escala de forma óptima entonces la solución puede ser equivalente a la que resulta de resolver el problema de la firma y viceversa. De esta forma, el problema de la firma podría considerarse equivalente a un problema en dos estapas: primero minimizar costos y depués seleccionar la escala óptima de operación. En lo que resta de esta sección probamos informalmente las afirmaciones anteriores.

Proposición 13 *Supongamos que existe competencia perfecta en los mercados de insumos y en el mercado del bien final. Sea $x(p, w)$ y $y(p, w)$ la demanda de insumos y la oferta del bien final que resuelven el problema de la firma. Entonces:*

1. *$x(p, w)$ resuleve el problema de minimización de costos:*

$$c(w, y(p, w)) = \min_{\substack{x \geq 0 \\ f(x) \geq y(p, w)}} w \cdot x$$

2. *$y(p,w)$ resuelve el problema de optimización de escala:*

$$\max_{y \geq 0} py - c(w,y)$$

y viceversa, si $x(p,w)$ y $y(p,w)$ resuelven los problemas de minimización de costos y el problema de optimización de escala, entonces resuelven el problema de la firma.

Prueba. Primero demostramos que maximizar beneficios implica 1 y 2. Como

$$py(p,w) - w \cdot x(p,w) \geq py - w \cdot x$$

para todo (y,x) tal que $f(x) \geq y$ con igualdad cuando $y = y(p,w)$ y $x = x(p,w)$; se sigue que,

$$p \cdot y(p,w) - w \cdot x(p,w) \geq \max_{x \geq 0, f(x) \geq y} py - w \cdot x$$

para todo y con igualdad cuando $y = y(p,w)$ y $x = x(p,w)$. Por lo tanto

$$py(p,w) - w \cdot x(p,w) \geq py - \min_{x \geq 0, f(x) \geq y} w \cdot x$$

para todo y. En particular cuando $y = y(p,w)$ tenemos una igualdad luego:

$$\min_{x \geq 0, f(x) \geq y(p,w)} w \cdot x \geq w \cdot x(p,w)$$

para todo x con igualdad cuando $x = x(p,w)$. Esto demuestra la primera parte. Para la segunda parte recordemos que

$$c(w,y) = \min_{x \geq 0, f(x) \geq y} w \cdot x$$

luego,

$$py(p,w) - w \cdot x(p,w) \geq py - c(w,y)$$

para todo (y,x) tal que $f(x) \geq y$ con igualdad cuando $y = y(p,w)$. Esto demuestra que cuando $y = y(p,w)$ la escala de operación de la firma es óptima.

De otra parte, sea $x(p,y)$ la demanda condicional de insumos (la solución al problema de minimización de costos) luego $f(x(p,y)) = y$ y $c(w,y) = w \cdot x(p,y)$. Ahora si y resuleve el problema de optimización de escala entonces:

$$\begin{aligned} pf(x(p,y)) - w \cdot x(p,y) &= py - c(w,y) \\ &\geq py' - c(w,y') \text{ para todo } y' \geq 0 \end{aligned}$$

luego:

$$py - c(w,y) \geq pf(x') - c(w, f(x')) \text{ para todo } x' \geq 0$$

y por definición de la demanda condicional de insumos y la función de minimización de costos:

$$pf(x(p,y)) - w \cdot x(p,y) \geq pf(x') - w \cdot x' \text{ para todo } x' \geq 0$$

y esto demuestra que $x(p,y)$ resuelve el problema de la firma cuando $x(p,y)$ es la demanda condicional y $y(p,w)$ resuelve el problema de optimización de escala. ■

9.3. Corto y largo plazo

- En esta sección nos limitamos a hacer una aclaración sobre la geometría de los costos de largo y corto plazo teniendo como referencia el libro de [JR].

- La demostración de la ecuación 3.5 del texto no es completamente trivial y el argumento que se da para la demostración de la ecuación 3.4 es como mínimo, engañoso (la razón es que las función de costo de corto plazo se define a través de una optimización con reestricciones). El argumento formal consiste en aplicar con cuidado las condiciones de primer orden a un problema de optimización sin reestriciones. Por simplicidad, supongamos que tenemos sólo un insumo (el argumento es fácil de extender). Fijemos $w, \overline{w}$:

  1. $c(w, \overline{w}, y) \leq c(w, \overline{w}, y, \overline{x})$ para todo $\overline{x}$ (esto es por definición de ambos problemas).
  2. Además $c(w, \overline{w}, y) = c(w, \overline{w}, y, \overline{x}(w, \overline{w}, y))$
  3. Luego,
  $$c(w, \overline{w}, y) = \min_{x \geq 0} c(w, \overline{w}, y, x)$$
  4. Si suponemos que $\overline{x}(w, \overline{w}, y) > 0$ (que por el numeral 2 es el nivel de insumos que resuleve este problema de optimización) entonces:
  $$\frac{\partial c(w, \overline{w}, y, x)}{\partial x} \Big|_{x=\overline{x}(w,\overline{w},y)} = 0$$
  que era lo que queríamos demostrar.

10. Equilibrio general

10.1. Introducción

El padre del modelo de Equilibrio General (EG) es sin lugar a dudas Leon Walras (Francia, 1834-1910). Hijo de economista, Walras fue uno de los grandes exponentes de la tradición Marginalista, junto con W. Jevons y C. Menger. Además de la importancia metodológica de sus ideas, que fortalecieron el proceso de matematización de la ciencia económica, las primeras contribuciones de Walras sentaron gran parte del pensamiento económico moderno. Por una parte, fue Walras quien primero consideró de una manera sistemática el caso de múltiples mercados (con o sin producción). Además, fue él quien primero derivó (explícitamente) las curvas de demanda y oferta como solución a problemas de maximización, y quien introdujo el concepto de equilibrio como aquella situación en la que, en todos los mercados, oferta y demanda son iguales.

A pesar de que su proyecto académico era fundamentalmente de carácter normativo, en parte debido a su orientación socialista, Walras decidió que las primeras preguntas que debían responderse en torno a su modelo eran de carácter positivo. El primer problema que Walras atacó fue el de existencia. Su respuesta a esta pregunta fue simplista: la observación de que su modelo generaba un mismo número de incógnitas que de ecuaciones le sirvió de argumento para afirmar que la pregunta de la existencia del EG tenía una respuesta positiva. De la misma forma, Walras introdujo el concepto de tatonador o subastador, consistente en un agente artificial que se encargaba de ajustar los precios en la dirección que los excesos de demanda/oferta indicaran, y presumió que bajo este mecanismo el EG era estable.

Con estos aspectos positivos presuntamente resueltos, Walras procedió a abordar preguntas normativas como cuál debería ser la distribución de la riqueza y cómo era que ésta podía aumentarse.

Walras, para entonces profesor de Lausana, fracasó en su intento de popularizar sus ideas entre otros economistas y, de hecho, en la actualidad sólo su estudio positivo del problema de EG y su planteamiento del mismo son considerados aportes al desarrollo de la ciencia.

Cuando Walras decidió que era tiempo de abandonar su posición en Lausana, decidió también buscar alguien que lo reemplazara dentro del grupo de personas que habían sido receptivos de sus ideas. Uno de los corresponsales más habituales de Walras, un profesor italiano, le recomendó a un joven ingeniero con vocación matemática para la posición, se trataba de Wilfredo Pareto (noble italiano, nacido durante el exilio de su padre en Francia, 1848-1923).

A pesar de grandes diferencias ideológicas y personales, Walras decidió dejar a Pareto la posición y, él creía, el proyecto intelectual.

Fueron muchos los aportes de Pareto, y muy grandes las diferencias entre su enfoque y el de Walras, a pesar de que gran parte de la modelación fue similar. Un primer punto de partida fue que Pareto abandonó el utilitarismo, que hasta entonces había sido lugar común en el pensamiento económico y había estado implícito en las ideas normativas de Walras. Pareto pensó que uno podía deshacerse totalmente del concepto de función de utilidad, en tanto éste sólo constituye una representación del concepto relevante, las preferencias, las cuales, al no ser comparables interpersonalmente, dejan sin piso la teoría utilitarista.

Adicionalmente, como parte de su rechazo del utilitarismo, Pareto se apartó diametralmente del concepto de equilibrio que había defendido Walras. Para él, el equilibrio se obtenía en aquella situación en la que la tensión entre lo que los individuos desean y lo que es posible socialmente es plena en el sentido de que con los recursos disponibles mejorar la situación de un agente implicaría empeorar la de algún otro.

Pareto además fue quien planteó por primera vez el debate sobre implementación de resultados, con la idea de que, dado que el EG era simplemente la solución de un sistema de ecuaciones, un gobierno podía simplemente resolver el sistema de ecuaciones y calcular e imponer el equilibrio sin necesidad de pasar por el funcionamiento del mercado.

A pesar de su formación de ingeniero, gran parte de su trabajo se centró en un discurso lógico sin formalización matemática. Sin embargo, es también claro que sus resultados fueron obtenidos en gran parte gracias al aporte metodológico que vino con el concepto de curva de indiferencia, propuesto por un contemporáneo suyo, Francis Ysidro Edgeworth (oligarca irlandés/inglés - de madre catalana -, 1845-1926).

Ante la muerte de sus padres y sus seis hermanos, Edgeworth había recibido una herencia millonaria, la cual le permitió dedicarse al trabajo puramente académico, a pesar de enfrentar grandes dificultades para obtener una posición en alguna institución prestigiosa. Matemático autodidacta, sus primeros trabajos en economía fueron en la tradición normativa utilitarista, y condujeron a su definición de la curva de indiferencia social.

Además del enorme aporte metodológico que esto constituyó, Edgeworth tuvo además enormes contribuciones conceptuales. En primer lugar, él estudió el conjunto de resultados de intercambio a los que ningún individuo o grupo de individuos podía oponerse efectivamente, en el sentido de lograr una mejora para sí aislándose del intercambio. Su conjetura es que en una economía con un número muy alto de agentes, este conjunto se reducía a los resultados de equilibrio según la definición de Walras.

El trabajo de Edgeworth fue de muy lenta aceptación. El decidió incluso alejarse por un tiempo de la economía y, de hecho, hizo importantes contribuciones a la teoría de la probabilidad, cuando, finalmente y gracias a recomendaciones de algunos de sus críticos, le fueron ofrecidas una posición en Oxford y la posición de editor de una revista muy prestigiosa: The Economic Journal. De ahí, Edgeworth continuó contribuyendo al EG, en particular con algunos resultados que parecían paradójicos y fueron poco aceptados (aunque hoy es claro que eran correctos) y principalmente a los modelos de competencia imperfecta.

Edgeworth no estableció nunca una línea de investigación a seguir, y de hecho fueron pocos los economistas que se preocuparon por seguir desarrollando sus ideas. Notables excepciones fueron, como ya dije, Pareto, y además Irving Fisher (USA, 1867-1947).

Fisher, un economista de Yale, fue importante no sólo porque, siendo un gran formalizador matemático, expresó las ideas de Walras prácticamente como hoy las utilizamos, y porque, independientemente de Edgeworth, definió la curva de indiferencia (individual) como hoy lo hacemos, sino porque además dio una nueva, aunque indirecta, prueba de existencia, al ser el primer economista en preocuparse expresamente en el problema de computación del EG: Fisher creó una máquina hidráulica que encontraba correctamente el EG de economías de intercambio.

Entre la primera década del siglo XX y 1950, las grandes contribuciones a la teoría del EG se detuvieron. Esto cambió cuando, por coincidencia, llegaron a trabajar a la Cowles Commission en Chicago, Kenneth Arrow (Estados Unidos, 1921-aún vivo) y Gerard Debreu (Francia, 1921-aún vivo).

Arrow era un estadístico matemático, no particularmente orientado a la vida académica. Sin embargo, presionado por su asesor de tesis doctoral, él comenzó su carrera con dos contribuciones de gran trascendencia. En primer lugar, con su tesis Arrow derrumbó las bases del utilitarismo, cuando demostró que, bajo axiomas ciertamente plausibles, es imposible construir una función de bienestar social que agregue las preferencias individuales. En segundo lugar, ya trabajando en Cowles, Arrow demostró que las diferencias entre las ideas de Walras y aquellas de Pareto no eran tan relevantes como hasta entonces se había creído, en el sentido de que los enfoques de ellos dos eran fundamentalmente equivalentes. Específicamente, él demostró que cualquier equilibrio de Walras (bajo ciertos supuestos muy razonables en cuanto a los individuos) era también un equilibrio de Pareto y que cualquier equilibrio de Pareto podía implementarse como uno de Walras, por medio de una redistribución de los recursos.

Estos dos resultados, que corresponden a la parte más importante de la agenda de Pareto, se conocen hoy como los dos teoremas fundamentales de economía del bienestar. Coincidencialmente, los mismos resultados fueron descubiertos también en Cowles, de manera simultánea pero independiente, por Debreu.

Debreu, un matemático extraordinario por formación, y que también llegó a Cowles por sugerencia de su asesor de tesis doctoral, encontraba que los argumentos de existencia dados por Walras estaban lejos de ser satisfactorios. Al encontrarse en Cowles con Arrow, se formó el equipo que logró el que podría considerarse como el desarrollo más importante de la teoría económica en toda su historia: incorporando nuevos métodos matemáticos, en 1954 ellos demostraron que bajo ciertos supuestos poco controversiales, el equilibrio Walrasiano siempre existe (no sólo eso, sino que lo lograron hacer de una manera axiomática, que no necesitaba cálculo diferencial). Este hecho revolucionó la forma de hacer teoría económica: a partir de entonces, cuando un concepto de equilibrio es propuesto, su aceptación en la comunidad académica sólo puede lograrse cuando el problema de su existencia ha sido plenamente estudiado.

Pero la agenda de investigación de Arrow y Debreu no terminó aquí. Arrow estudió el problema de unicidad del equilibrio para demostrar que las condiciones que dicha unicidad requiere son extremadamente duras. Entre tanto, Debreu demostró que el equilibrio no tiene por qué ser localmente aislado ni estable. Por otra parte, él también demostró que el equilibrio casi siempre es localmente aislado y que hay un número finito de ellos.

Además, Debreu demostró que Edgeworth estaba en lo correcto cuando conjeturó que al incrementar el número de agentes, el conjunto de asignaciones a las que no se les presenta ninguna objeción converge al conjunto de equilibrios Walrasianos.

En síntesis, Arrow y Debreu asentaron definitivamente la teoría económica que surgió de la agenda de investigación de sus predecesores, al punto que el modelo Walrasiano también suele conocerse en la actualidad como el modelo de Arrow y Debreu. Adicionalmente ellos propusieron, de manera independiente, la generalización del modelo para hacerlo dinámico, e incorporaron aspectos de incertidumbre. Arrow ganó el premio Nobel en 1972 y Debreu lo hizo once años después. La parte central de este curso es el trabajo de Arrow y Debreu.

10.2. Economías de intercambio

En las primeras secciones estudiamos los elementos fundamentales de la teoría del consumidor y de la firma. En las próximas secciones nuestro objetivo será estudiar la forma como consumidores y firmas interactuan entre ellos. Sin embargo, es posible introducir las ideas principales si nos abstraemos momentáneamente de las firmas y el proceso productivo y pensamos en una economía como un conjunto de agentes donde cada uno tiene una serie de dotaciones iniciales de cada uno de los bienes de la economía. Al conjunto de consumidres dotados de una canasta de bienes iniciales lo denominaremos una economía de intercambio y es el primer paso que daremos hacia la construcción de la teoría del equilibrio general. Las preguntas fundamentales que nos haremos son:

- En una economía de intercambio; ¿Cómo se distribuyen la totalidad de los bienes entres los consumidores? Este es el problema de redistribución de la totalidad de los bienes o recursos de la economía.
- ¿Qué incentivos existen para el intercambio de bienes y qué instituciones median el intercambio? Este es el problema de la descripción completa del ambiente económico en el cual los consumidores interactuan. Esto incluye: arreglos institucionales (¿existen o no mercados para todos los bienes y cómo son?), el conjunto de información de los consumidores y cómo se comparan este entre ellos, etc.
- Existe alguna distribución de los bienes que deje satisfecho a todos los agentes y que no existan incentivos a desviarse de ella? Es decir; ¿Existe una distribución que podríamos llamar un equilibrio de la economía en el sentido que, una vez la distribución es la de equilibrio, ningún agente tiene un incentivo a desviarse.
- Cuáles son las propiedades de este equilibrio? Es único (el problema de la unicidad)? Es estable (el problema de la estabilidad)? Es eficiente socialmente? Como veremos, cada una de estas tiene implicaciones importantes sobre la distribución de los bienes, el papel del gobierno y la posibilidad de indentificar políticas adecuadas, etc.

Más formalmente, supongamos que existen I consumidores y denotamos el conjunto de consumidores por $\mathcal{I} = \{1, ...I\}$. Cada consumidor i esta caracterizado por una función de utilidad u^i que representa sus preferencias sobre el espacio de consumo $X = \mathbb{R}_+^L$ y una canasta o dotación inicial $w^i \in \mathbb{R}_+^L$ de los bienes de consumo. Es decir, las características del consumidor son la pareja $\left(u^i, w^i\right)$. Por simplicidad, vamos a suponer que las funciones de utilidad de los agentes representan preferencias neoclásicas.

Definición 15 *Una economía de intercambio es $\mathcal{E} = (\mathcal{I}, \left(u^i, w^i\right)_{i \in \mathcal{I}})$ donde $\mathcal{I}$ es el conjunto de agentes, u^i es una representación de las preferencias de cada consumidor y w^i son las dotaciones iniciales.*

Denotamos por $w = \sum_{i=1}^{I} w^i$ la totalidad de los recursos de la economía. Una *distribución* de recursos es un vector de canastas de consumo, uno para cada consumidor, $x = (x^1, x^2, ..., x^I)$ y $x^i \in \mathbb{R}_+^L$. Por simplicidad, denotaremos la distribución de recursos por $x \in \mathbb{R}_+^{IL}$. Decimos que una distribución de recursos x es *factible* en la economía $\mathcal{E}$ si $\sum_{i=1}^{I} x^i = w$. En este caso también decimos que $x \in \mathbb{R}_+^{IL}$ es una *redistribución* de los recursos de la economía $\mathcal{E}$.

Para fijar ideas, siempre que pensemos en una economía de intercambio pensemos en un conjunto de personas que son abandonadas en una isla desierta a la cual cada uno lleva una maleta con todos los elementos necesarios para sobrevivir durante un día. La isla no tiene árboles frutales ni ningún elemento deseable por sus visitantes.

10.3. El análisis de Pareto (eficiencia)

La primera pregunta que nos vamos a plantear tiene origen en las ideas de Pareto. Supongamos que no existe ninguna institución mediadora del intercambio, los consumidores no se relacionan con los demás ni tienen conocimiento alguno sobre sus preferencias. Supongamos que existe un agente externo a la economía que en ocasiones llamaremos el planificador central, que recoge la totalidad de las dotaciones de los consumidores y se pregunta cual es la mejor forma de redistribuir los recursos totales de la economía. La palabra clave aqui es, qué queremos decir por mejor. Para Pareto, la noción de mejor es la noción que quizás todos coincidiríamos en que es lo mínimo que deberiamos de esperar de una redistirbución de los recursos. Esto es, *que no exista ninguna otra forma de redistribuir que, sin emperorar a ningún consumidor, mejore a por lo menos uno.* Esta noción de lo que es mejor es lo que en la actualidad llamamos de *eficiencia de Pareto (* o también *óptimo de Pareto).*

Definición 16 (Eficiencia de Pareto) *Sea $\mathcal{E}$ una economía. Decimos que un redistribución de recursos $x = (x^1, x^2, ..., x^I)$ es eficiente en el sentido de Pareto (o es una asignación de Pareto) si no existe otra redistribución de recursos $\widehat{x} = (\widehat{x}^1, \widehat{x}^2, ..., \widehat{x}^I)$ tal que para todo agente i, $u^i(\widehat{x}^i) \geq u^i(x^i)$ y para al menos un agente i^*, $u^{i^*}(\widehat{x}^{i^*}) > u^{i^*}(x^{i^*})$.*

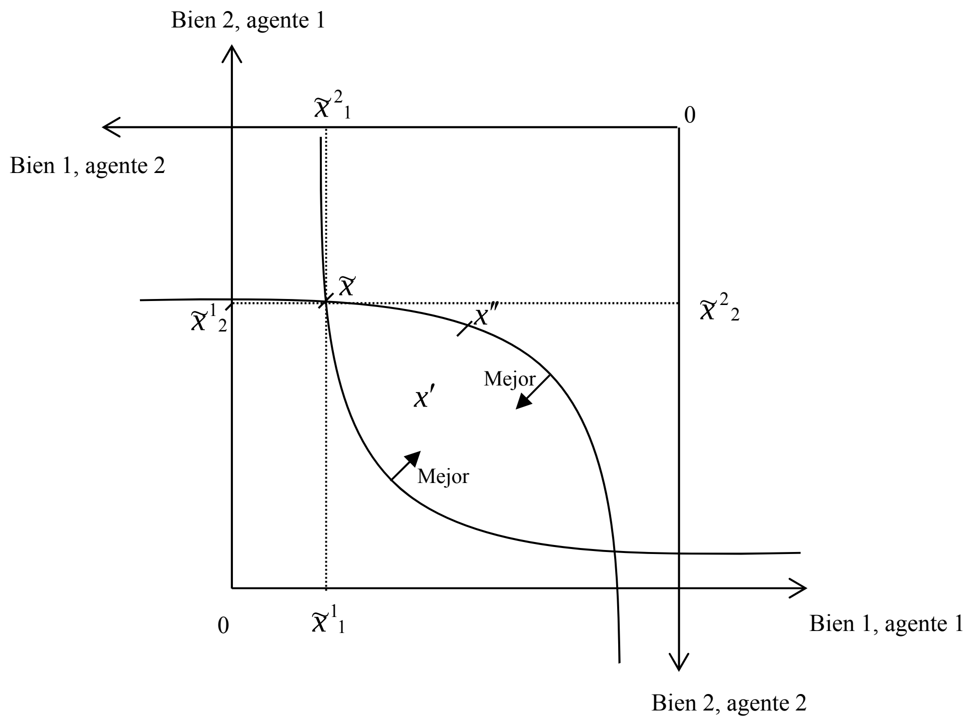
- Es el concepto de eficiencia de Pareto en un sentido fuerte.
- Utilizando la caja de Edgeworth, consideremos los siguientes casos:

Caso 1 *Considere la asignación $\widetilde{x}$:*

La asignación $\widetilde{x}$ no es socialmente eficiente. Si la economía se moviera a la asignación x', la cual es factible, ambos agentes experimentarían una mejora en su bienestar. Nótese, sin embargo, que para argumentar que $\widetilde{x}$ es ineficiente no hace falta que los dos agentes mejoren: en una asignación como x'', que también es factible, el agente 1 está estrictamente mejor y el agente 2 no ha empeorado, lo cual es suficiente para decir que $\widetilde{x}$ no era eficiente.

Caso 2 *Considere la asignación x:*

Manteniendo constante el tamaño de la caja, mejorar el bienestar del agente 1 implicaría lograr una asignación arriba/a la derecha de su curva de indiferencia, lo cual implicaría deteriorar el bienestar del agente 2. De la misma forma, mejorar la situación del agente 2 equivale a lograr una asignación abajo/a la izquierda de su curva de indiferencia, lo cual dejaría al agente 1 en una situación estrictamente peor. Esta es la situación de eficiencia social que Pareto visualizaba: es imposible lograr una mejora para algún agente de la economía sin al mismo tiempo imponer a algún otro agente un deterioro en su bienestar.

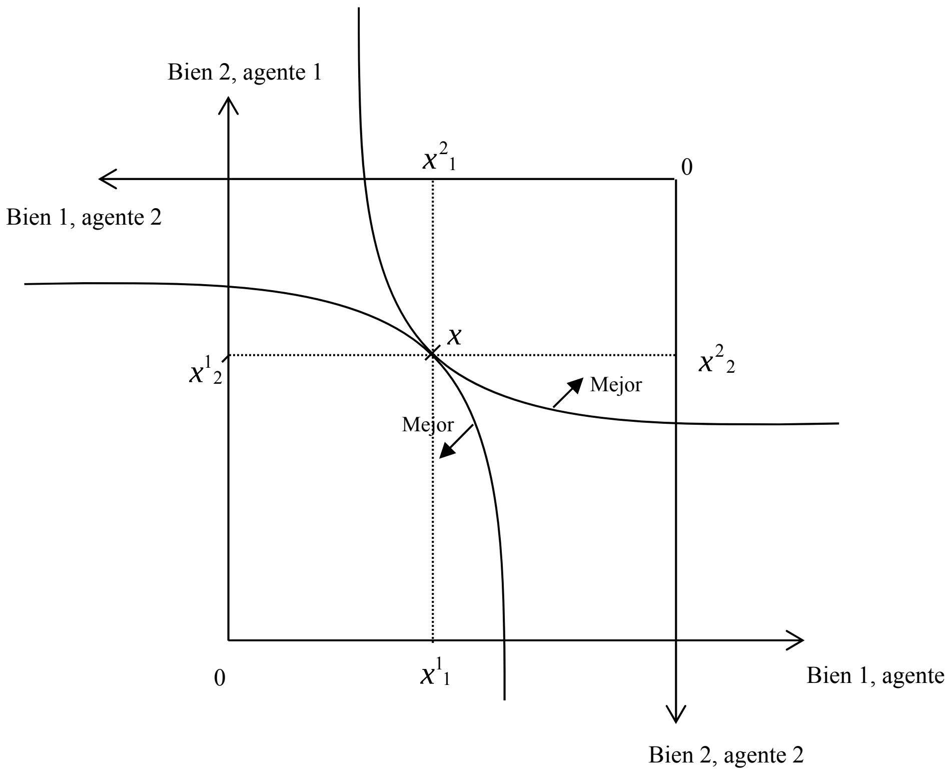


Nota técnica 4 *Nótese que para la definición de eficiencia de Pareto las dotaciones individuales no son importantes más allá de que ellas determinan el tamaño de la caja de Edgeworth (y debería ser obvio que, en general, para una caja dada hay infinidad de posibles pares de dotaciones que la generan como Caja de Edgeworth).*

10.3.1. La curva de contrato

Es fácil ver que en una economía pueden existir muchas asignaciones diferentes que son eficientes en el sentido de Pareto. Por ejemplo: dar todo al agente 1 y nada al agente 2, o nada al 1 y todo al 2 son ambas asignaciones eficientes. Es más, con las curvas de indiferencia habituales también se suele encontrar otras asignaciones de Pareto.

El conjunto de todos los puntos de Pareto de una economía es conocido como su curva de contrato. La razón para este nombre es que, es de presumir que todos los contratos de intercambio entre agentes de esta economía arrojarán asignaciones que se encuentran en esta curva; de lo contrario, al menos uno de los agentes estaría desaprovechando una oportunidad, aceptable por el otro



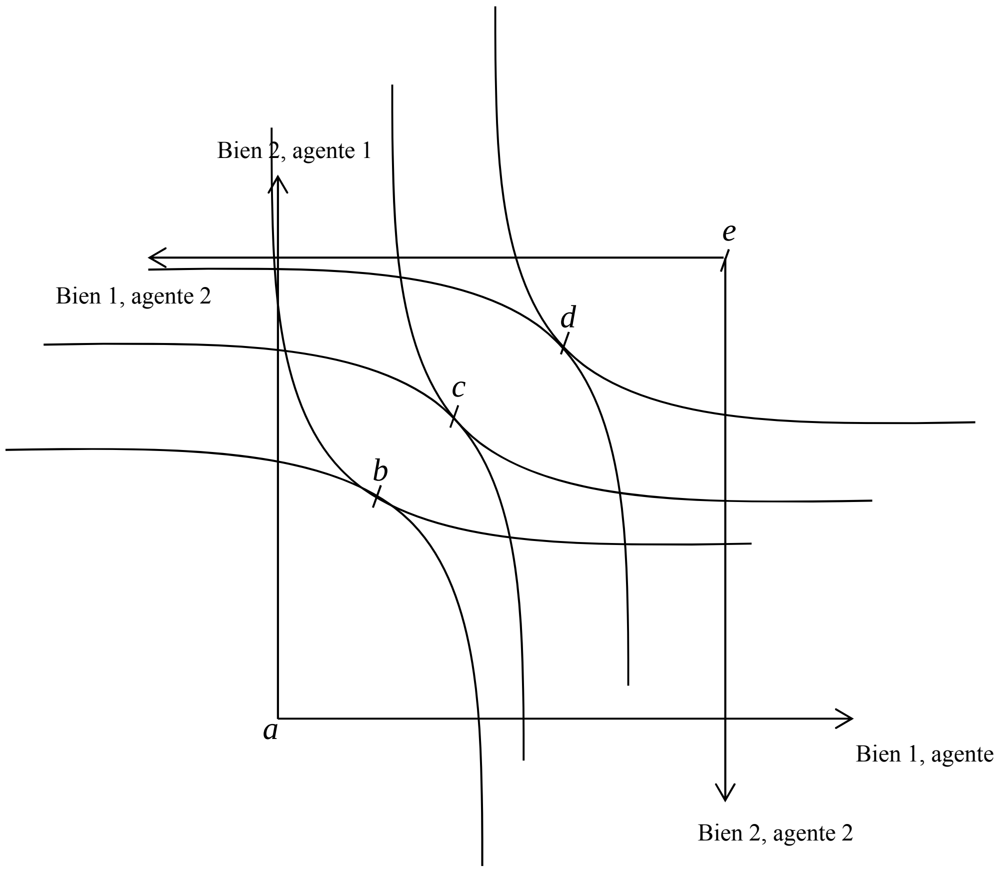
agente, de intercambiar y lograr para si una mejora).

Metodológicamente, es claro que en el interior de la caja de Edgeworth los puntos de Pareto son aquellos en los que las curvas de indiferencia de los agentes son tangentes. Cuando las preferencias tienen asociadas funciones de utilidad para las cuales uno puede encontrar derivadas, esta tangencia se traduce en igualdad entre las tasas marginales de sustitución.

Ejemplo 26 *Supongamos que*

$$\begin{aligned} u^1(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1 x_2} \\ u^2(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1 x_2} \\ w^1 &= (1, 1) \\ w^2 &= (1, 1) \end{aligned}$$

Es claro que en el borde de la Caja de Edgeworth los únicos puntos de pareto son $\left(x^1 = (2,2), x^2 = (0,0)\right)$ *y* $\left(x^1 = (0,0), x^2 = (2,2)\right)$. *Ahora, consideremos*



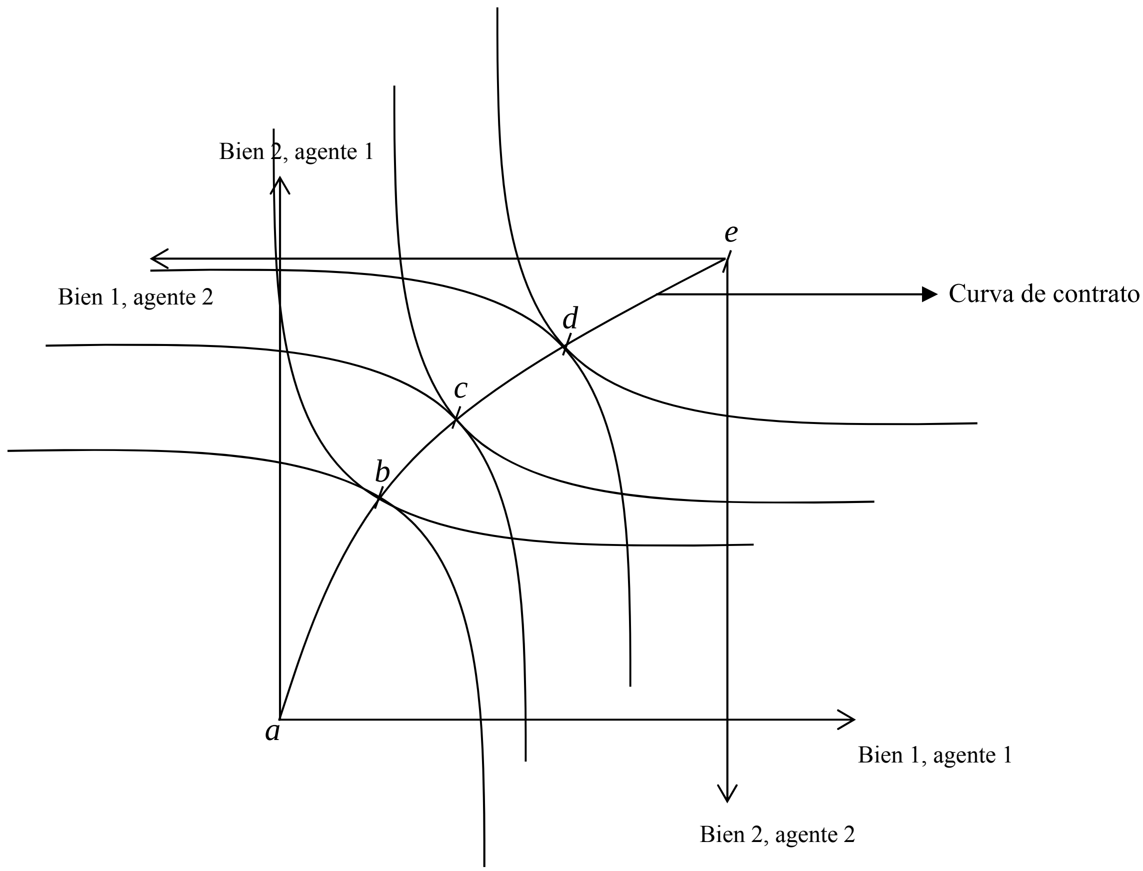
el interior de la caja. Dado que podemos diferenciar las funciones de utilidad:

$$
\begin{aligned}
TMS^1\left(x_1^1, x_2^1\right) &= \frac{\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\left(x_1^1, x_2^1\right)}{\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\left(x_1^1, x_2^1\right)} \\
&= \frac{x_2^1}{x_1^1}
\end{aligned}
$$

y, similarmente:

$$TMS^2\left(x_1^2, x_2^2\right) = \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{x_2^2}{x_2^2}$$



mientras que por factibilidad:

$$\begin{aligned} x_1^1 + x_1^2 &= 2 \\ x_2^1 + x_2^2 &= 2 \end{aligned}$$

Esto último implica:

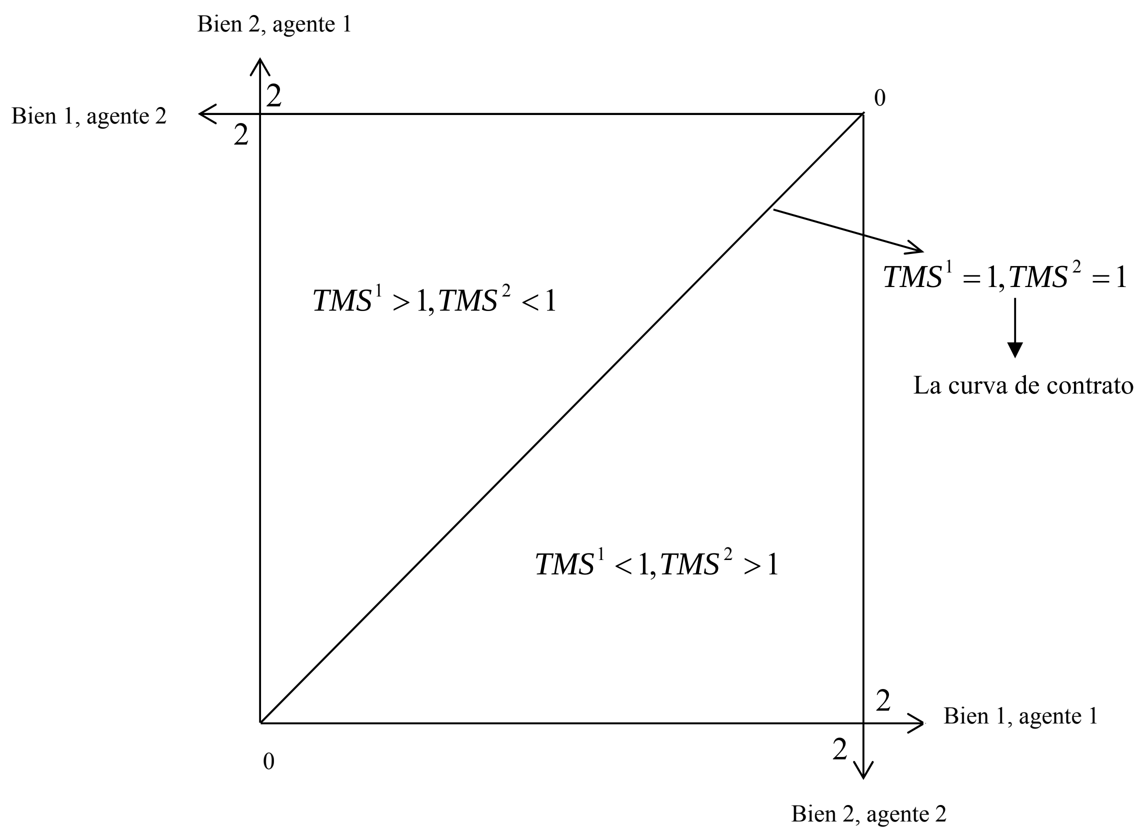
$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{2 - x_2^1}{2 - x_1^1}$$

luego,

$$x_2^1 = x_1^1$$

Ejercicio 28 *Encuentre la curva de contrato de las siguientes economías:*

1. $u^1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, $u^2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, $w^1 = (2, 1)$ *y* $w^2 = (1, 1)$.
2. $u^1(x_1, x_2) = x_1^{0,6} x_2^{0,6}$, $u^2(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,4}$, $w^1 = (2, 2)$ *y* $w^2 = (0, 0)$.



3. *(Más difícil)* $u^1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, $u^2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, $w^1 = (1, 1)$ *y* $w^2 = (1, 1)$.

10.4. El análisis de Edgeworth (núcleo)

El análisis anterior hace uso de una hipótesis muy fuerte. Esto es, supone la existencia de un planificador central con conocimiento perfecto de las preferencias de todos los agentes, la dotación total de recursos y que, actuado de buena fe, se porpone distribuir estos recursos de tal forma que sea un óptimo de Pareto. Es claro que tal supuesto está lejos de cumplirse en la realidad y por lo tanto debemos buscar responder a la misma pregunta planteada anteriormente utilizando algún otro mecanismo más realista desde el punto de vista económico. Ahora, también es cierto que el concepto de distribución utilizado anteriormente puede no ser en ocasiones, razonable. Por ejemplo, si el planificador central le entrega la totalidad de los recursos a un solo individuo, esta reasignación de resursos es claramente un óptimo de Pareto sin embargo, no parece del todo razonable o, intuitivamente, justa. De hecho, si hay un agente que tiene dotación inicial positiva de cada bien no parece razonable que, en caso de tener alguna injerencia sobre las decisiones del planificador y que éste no fuera el beneficiado de la redistribución de recursos, éste aceptara ser despojado de su dotación inicial a cambio de nada. Esto nos lleva a considerar otra forma de pensar sobre la reasignación de los recursos que no supone la presencia de un planificador todo poderoso (i.e., con conocimiento completo de todos los detalles de la economía).

Supongamos que no existe el planificador central mencionado anteriormente y que cada consumidor tiene la posibilidad de, con cero costo:

1. Intercambiar con cada uno de los consumidores de forma voluntaria.
2. Obtener información sobre las preferencias y dotaciones de todos los demás consumidores.
3. Formar coaliciones o grupos de consumidores.

Llamaremos a este mecanismo el mecanísmo de *intercambio voluntario*. La primera pregunta es por supuesto, si dejaramos a los consumidores interactuar bajo las condiciones descritas, realizando únicamente intercambios de forma voluntaria; ¿Cuál sería la(s) redistribución final de recursos?

Las hipótesis que estamos haciendo sobre esta economía son ciertamente bastante irrealistas al igual que en la sección pasada sin embargo, por lo menos sugieren un mecanismo que, intuitivamente, debería de resultar en asignaciónes mejores para cada consumidor en comparación a sus dotaciones iniciales y sin suponer la existencia de un planificador todo poderoso y benevolente. Esto es claro si tenemos presente que los intercambio de los consumidores son voluntarios. Cuando una asignación de recursos $x \in \mathbb{R}^L_+$ para un individuo i es tal que $u^i(x) \geq u^i(w^i)$ diremos que la asignación es individualmete racional. Luego, utilizando esta terminología, como mínimo esperariamos que el intercambio voluntario resultará en asignaciones individualmente racionales para todo los consumidores. Obsérvese que una forma altenativa de reasignar los recursosos y que requiere muy pocas hipótesis para su formulación es la siguiente. Supongamos que existe un planificador central con ningún conocimiento sobre las preferencias de los consumidores pero con la facultad de redistribuir a voluntad la totalidad de los recursos de la economía. Para tal fin el uiliza la siguinete regla. Dependiendo de la proporción de recursos que cada agente contribuya a la totalidad de los recursos este les asigna una distribución de probabilidad sobre el conjunto de bienes de la economía. Supongamos además que el divide la totalidad existente en paquetes de por ejemplo, el 10 % de la totalidad existente del bien. Una vez hecho esto el convoca a todos los consumidores a su gran rifa. En la rifa el planificador hace $10\times$L rifas, 10 rifas por cada cada bien.

En cada rifa se asigna un paquete de cada bien y este hace que la probabilidad de que individuo gane sea igual a la distribución de proabilidad que él les asignó (es decir, este planificador tiene las misma facultades del planificador de la sección anterior pero no tiene conocimientos de las preferencias de los agentes ni conocimiento alguno sobre la redistribución final de los recursos que desea, simplemente los va asignar de una forma bien especificada; mediante una serie de rifas).

Problema 1 *¿Que tipo de resultados podria usted esperar de esta forma de reasignaión de los recursos?*

Luego, la clave no esta únicamente en encontrar mecanismo bien definidos y que requieran poco supuestos para ser implementables, pero obviamente, en las propiedades de las reasignaciones resultantes.

Retornando al mecanismo de intercambio voluntario la pregunta que nos hacemos es, cuales son las reasignaciones de recursos que podríamos esperar de dejar a los consumidores intercambiar según el mecanismo propuesto. Para estudiar formalmente esta idea introducimos el siguinente concepto.

Definición 17 *Una coalición de agentes es un subconjunto no vacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}$ del conjunto de consumidores. Decimos que una coalición $\mathcal{S}$ tiene una objeción (objeta o bloquea) a la asignación $x = (x^1, x^2, ..., x^I)$ si existe para cada uno de los consumidores en la coalición $\mathcal{S}$ una canasta $\widehat{x}^i$, $i \in \mathcal{S}$ tal que:*

(i) Las canastas son factibles desde el punto de vista de la coalición:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \widehat{x}^i = \sum_{i \in \mathcal{S}} w^i$$

(ii) Todos los miembros de la coalición encuentran a $\widehat{x}^i$ al menos tan deseable como x^i:

$$u^i(\widehat{x}^i) \geq u^i(x^i) \text{ para todo } i \in \mathcal{S}$$

(iii) Al menos un miembro de la coalición i^* prefiere estrictamente $\widehat{x}^{i^*}$ a x^{i^*}:

$$u^{i^*}(\widehat{x}^{i^*}) > u^{i^*}(x^{i^*}) \text{ para algún } i^* \in \mathcal{S}$$

El punto del concepto de objeción es que la coalición de agentes se retiraría de cualquier intercambio que encuentre objetable pues, en principio:

1. El agente i^* convencería a sus compañeros, pues él ganaría y los demás no perderían;

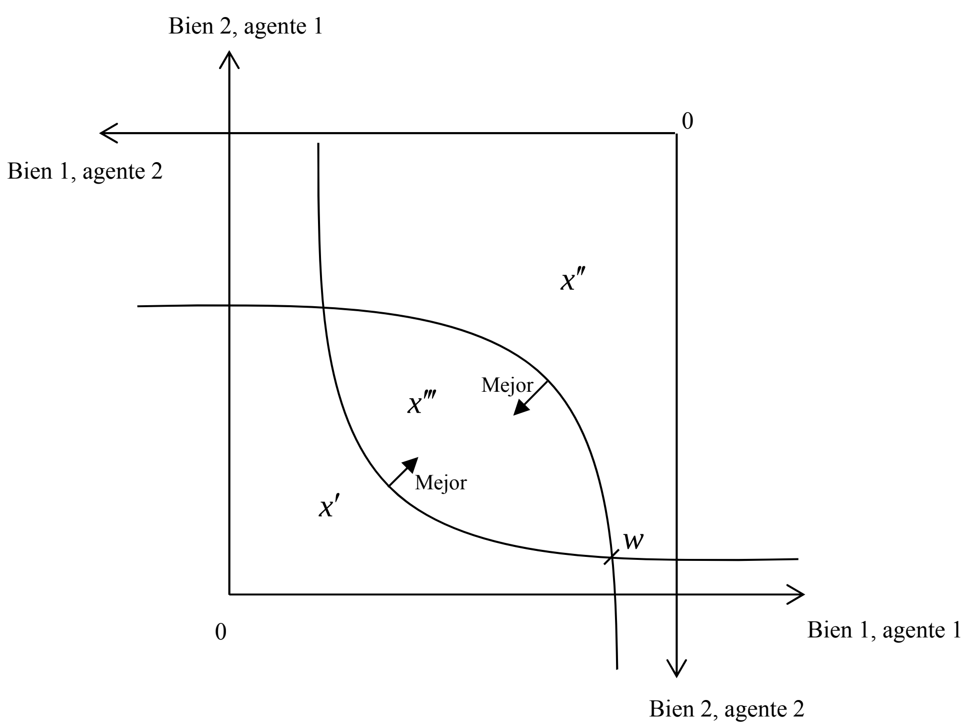
2. Por otra parte, ellos pueden lograr esa mejor situación por sí mismos: no necesitan las dotaciones de los demás para lograrlo.

Con esta definición, podemos introducir el concepto de núcleo de una economía de intercambio:

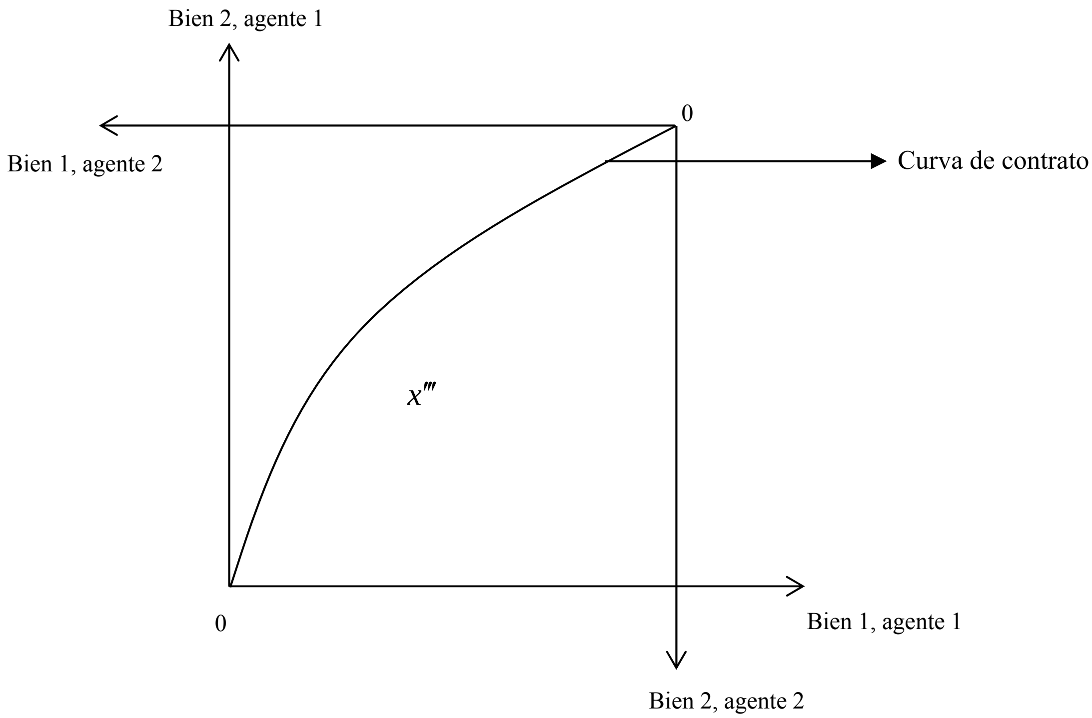
Definición 18 *El núcleo de una economía como la descrita es aquel conjunto de asignaciones factibles a las cuales ninguna coalición de agentes tiene una objeción.*

En una economía de intercambio de 2×2, el Núcleo es el conjunto de asignaciones factibles que son eficientes en el sentido de Pareto, y que cada agente encuentra superiores o indiferentes a su propia dotación.

Ejercicio 29 *Demuestre que en una economía con sólo dos agentes y dos bienes el Núcleo es el conjunto de asignaciones factibles que son eficientes en el sentido de Pareto, y que cada agente encuentra superiores o indiferentes a su propia dotación. Véanse las siguinetes figuras.*



Ejercicio 30 *Demuestre que en cualquier economía de intercambio, el núcleo es un subconjunto del conjunto de puntos de Pareto y del conjunto de asignaciones individualmente racionales para todos los agentes.*



Ejemplo 27 *Supongamos que:*

$$\begin{aligned} u^1(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1 x_2} \\ u^2(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1 x_2} \\ w^1 &= (1,1) \\ w^2 &= (1,1) \end{aligned}$$

Busquemos las canastas de consumo a las que el agente 1 *no tendría una objeción. Estas son,* (x_1^1, x_2^1) *tal que*

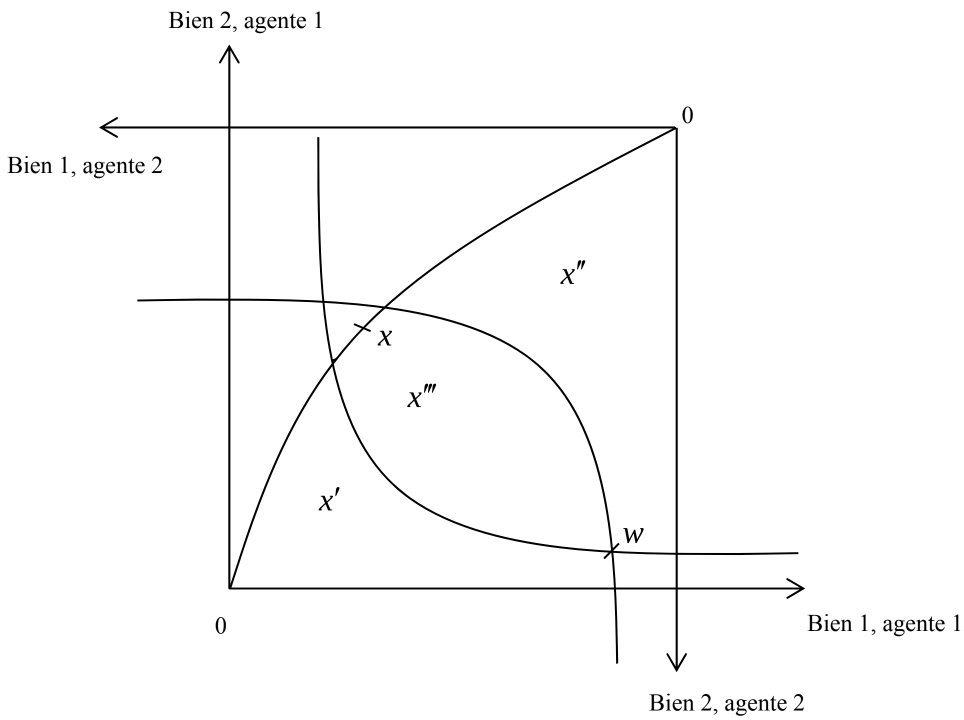
$$u^1(x_1^1, x_2^1) \geq u^1(w_1^1, w_2^1)$$

es decir,

$$(x_1^1, x_2^1) : x_1^1 x_2^1 \geq 1$$

Y similarmente para el agente 2*:*

$$(x_1^2, x_2^2) : x_1^2 x_2^2 \geq 1$$



(evidentemente, esto descarta cualquier punto en los bordes de la Caja).

Ahora, sabemos por el ejemplo 26 que las asignaciones eficientes (a las que la coalición $\{1,2\}$ no se opondría) satisfacen:

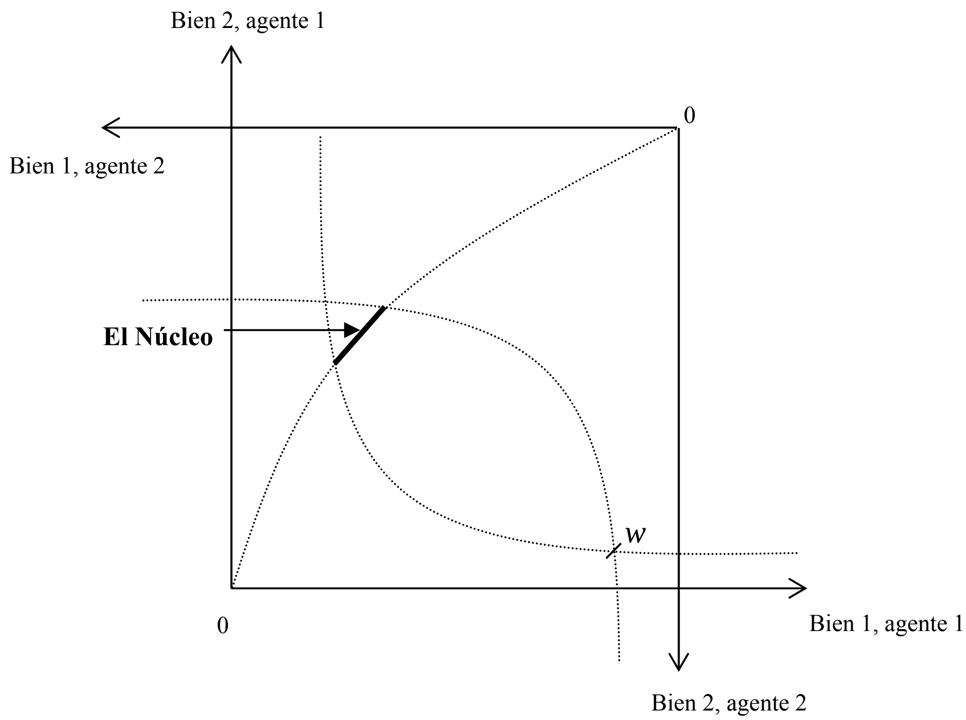
$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{x_2^2}{x_2^2}$$

mientras que por factibilidad:

$$\begin{aligned} x_1^1 + x_1^2 &= 2 \\ x_2^1 + x_2^2 &= 2 \end{aligned}$$

Esto último implica:

$$\begin{aligned} x_1^1 x_2^1 &\geq 1 \\ (2 - x_1^1)(2 - x_2^1) &\geq 1 \\ \frac{x_2^1}{x_1^1} &= \frac{2 - x_2^1}{2 - x_1^1} \end{aligned}$$



Despejando de la última de estas ecuaciones:

$$2x_2^1 - x_1^1x_2^1 = 2x_1^1 - x_1^1x_2^1 \Rightarrow x_1^1 = x_2^1$$

De donde se concluye que[9]

$$\begin{aligned} (x_1^1)^2 &\geq 1 \\ x_1^1 &\geq 1 \end{aligned}$$

y que[10]

$$\begin{aligned} (2 - x_1^1)^2 &\geq 1 \\ 2 - x_1^1 &\geq 1 \end{aligned}$$

Es decir:

$$1 \leq x_1^1 \leq 1$$

Por tanto, el núcleo de esta economía es el conjunto $\{x\}$ *con* $x = (x^1, x^2) = ((1,1),(1,1))$

[9] Por no negatividad, sabemos que $x_1^1 \geqslant 0$.

[10] Por factibilidad y no negatividad sabemos que $x_1^1 \leqslant 2$

Nota técnica 5 *Note que el núcleo depende de las dotaciones de los agentes, más allá del tamaño de la Caja de Edgeworth.*

Ejercicio 31 *Encuentre el núcleo de las siguientes economías:*

1. $u^1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, $u^2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, $w^1 = (2, 1)$ *y* $w^2 = (1, 1)$.
2. $u^1(x_1, x_2) = x_1^{0,6} x_2^{0,6}$, $u^2(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,4}$, $w^1 = (2, 2)$ *y* $w^2 = (0, 0)$.
3. $u^1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, $u^2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, $w^1 = (1, 1)$ *y* $w^2 = (1, 1)$

10.5. El análisis de Walras

Es claro que las hipótesis que hicimos sobre el ambiente económico en el cual se llevan a cabo los intercambios voluntarios de la sección anterior son bastante fuertes y al igual que en el caso del análisis de Pareto, bastante distantes del mundo real. De hecho, uno se debería de preguntar si los patrónes observados en el mundo real, como la existencia de algunos mercados y precios de bienes no corresponde de alguna manera a una institución eficiente como institución mediadora del intercambio de los consumidores. Ahora, si bien, la mera existencia de estas instituciones no siginifica necesariamente que han sido escogidas de manera óptima entre un menú de alternativas posibles a lo largo de la historia de la humanidad, sí debería de ser una fuente importante de inquitudes sobre la razón de su existencia. Como veremos, el análisis de Walras puede ser muy esclarecedor sobre la razón por la que los seres humanos hemos tendido a basarnos en estas instituciones como mecanismos de mediación del intercambio. Por su puesto, las instituciones como tal no son suficientes para describir completamente el mecanismo de intercambio y sus porpiedades resultantes que, como hemos visto, son el hilo conductor de todas las secciones anteriores. Para terminar de describir el ambiente económico en el cual toma lugar el intercambio, vamos a introducir la idea de competencia perfecta. Más formalmente, los ingredientes del análisis de Walras son los siguientes:

- Existe un mercado centralizado para cada bien por el cual los agentes tienen preferencias.
- Todos los agentes tiene accesso sin costo alguno, al mercado centralizado.
- Existe un precio único para cada bien y todos los consumidores conocen perfectamente el precio de éstos.
- Cada consumidor puede vender su dotación inicial en el mercado a los precios dados y utilizar el pago resultante (en la unidad de conteo) para demandar los bienes que más desea.
- Los consumidores buscan maximizar su utilidad dada la restricción presupuestal e independientemente de las acciones de los demás consumidores. En este sentido, el mecanismo expuesto es completamente descentralizado e impersonal. Ningún agente necesita saber nada de los demás, ni sus preferencias ni sus dotaciones iniciales.

- Competencia perfecta. Los consumidores toman los precios como dados y no creen tener ningún influencia sobre estos por causa de sus decisiones. Ni cuando intercambian su dotación inicial por un ingreso, ni cuando demandan bienes sujetos a su restricción presupuestal.
- La única fuente de información que los agentes utilizan para tomar sus decisiones de consumo son los precios y nada más.

La idea de Walras fue la siguiente (esta es la formulación matemática moderna de las ideas de Walras que tiene origen el trabajo de G. Debreu y K. Arrow a comienzos de las década de los cincuenta; ambos fuerón galardonados con el premio nobel de economía.[11]).

Definición 19 *Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio. Un equilibrio (general) con competencia perfecta para la economía de intercambio $\mathcal{E}$ es un par $(p,x) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^{IL}_{+}$ compuesto por un vector de precios p y una asignación de recursos $x = (x^1, ..., x^I)$ tal que:*

1. *Cada agente maximice su utilidad a los precios dados. Para todo $i \in \mathcal{I}$*

$$u^i(x^i) = \max_{x \in B(p, p \cdot w^i)} u^i(x)$$

2. *Todos los mercados se ajusten (i.e., se equilibran):*

$$\sum_{i=1}^{I} x^i = \sum_{l=1}^{I} w^i$$

Bajo este concepto más general, una generalización de la ley del presupuesto balanceado también aplica y se conoce como la ley de Walras. Si la canasta x^i es óptima para el agente i a los precios p (es decir, si satisface la condición (1) de la definición anterior), entonces debe satisfacer que

$$\sum_{l=1}^{L} p_l x_l^i = \sum_{l=1}^{L} p_l w_l^i$$

Sumando para todos los agentes, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} p_l x_l^i = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} p_l w_l^i$$

lo que podemos reescribir como

$$\sum_{l=1}^{L} \left(p_l \sum_{i=1}^{I} \left(x_l^i - w_l^i \right) \right) = 0$$

[11] La primera demostración se debe a Wald en 1936 utilizando hipótesis más reestrictivas.

Ahora, supongamos que para los $L-1$ primeros bienes el mercado se ha equilibrado, de forma tal que para todo $l = 1, 2, ..., L-1$

$$\sum_{i=1}^{I} \left(x_l^i - w_l^i\right) = 0$$

Esto implica que

$$p_L \sum_{i=1}^{I} \left(x_L^i - w_L^i\right) = 0$$

y como, bajo nuestros supuestos, $p_L > 0$, se sigue que el L-ésimo mercado también debe estar en equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{I} \left(x_L^i - w_L^i\right) = 0$$

Lo que hemos argumentado es entonces lo siguiente:

Teorema 15 *(La ley de Walras) En una economía de intercambio con L bienes, si los agentes escogen sus demandas óptimamente, el equilibrio entre oferta y demanda en $L-1$ de los mercados implica el mismo equilibrio en el mercado restante.*

- Más adelante vamos a dar una versión equivalente de la ley de Walras en términos de la función exceso de demanda.

Ejemplo 28 *Supongamos que*

$$\begin{aligned} u^1(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1 x_2} \\ u^2(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1 x_2} \\ w^1 &= (1, 1) \\ w^2 &= (1, 1) \end{aligned}$$

Dados estos datos, el problema para el consumidor 1 es:

$$\max \sqrt{x_1 x_2} \quad \textit{sujeto a: } p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant p_1 + p_2$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} x_1^1(p_1, p_2) &= \frac{1}{2}\frac{p_1 + p_2}{p_1} \\ x_2^1(p_1, p_2) &= \frac{1}{2}\frac{p_1 + p_2}{p_2} \end{aligned}$$

Dado que el problema de 2 es idéntico:

$$\begin{aligned} x_1^2(p_1, p_2) &= \frac{1}{2}\frac{p_1 + p_2}{p_1} \\ x_2^2(p_1, p_2) &= \frac{1}{2}\frac{p_1 + p_2}{p_2} \end{aligned}$$

Ahora busquemos precios p_1 y p_2 tales que los mercados se equilibren con estas demandas:

$$\begin{aligned} x_1^1(p_1,p_2)+x_1^2(p_1,p_2) &= w_1^1+w_1^2 \\ x_2^1(p_1,p_2)+x_2^2(p_1,p_2) &= w_2^1+w_2^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{p_1+p_2}{p_1}+\frac{1}{2}\frac{p_1+p_2}{p_1} &= 1+1 \\ \frac{1}{2}\frac{p_1+p_2}{p_2}+\frac{1}{2}\frac{p_1+p_2}{p_2} &= 1+1 \end{aligned}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Cualquier par de p_1 y p_2 que satisfaga que $p_1>0$ y $p_1=p_2$ soluciona el sistema. Por tanto, $p=(1,1)$, $x^1=x^1(1,1)=(1,1)$ y $x^2=x^2(1,1)=(1,1)$ es un equilibrio general. Gráficamente:

Nota técnica 6 *Cuando la restricción presupuestal de un agente está dada por el valor de una dotación,su demanda no cambia si uno multiplica todos los precios por una constante positiva. Por esta razón, en cualquier ecconomía hay un número infinito de vectores de precios de equilibrio: si $p=(p_1,p_2)$ es un vector de precios de equilibrio, también lo son $(2p_1,2p_2)$, $\left(\frac{1}{9}p_1,\frac{1}{9}p_2\right)$, $(500p_1,500p_2)$ y, en general, cualquier producto de p por un número positivo. Por esta razón, uno suele "normalizar" los precios fijando, por ejemplo, $p_1=1$ o requiriendo que $p_1+p_2=1$.*

Ejercicio 32 *Suponga que tenemos una economía con dos agentes y dos bienes. Sus funciones de utilidad son idénticas y del tipo CES:*

$$\begin{aligned} u^i(x_1,x_2) &= x_1^\rho+x_2^\rho \\ w^1 &= (1,0) \\ w^2 &= (0,1) \end{aligned}$$

1. *Calcular las funciones de demanda Marshaliana.*

2. *Mostrar que los precios $p_1=p_2$ son precios de equilibrio.*

Ejercicio 33 *Considere una economía de intercambio puro con dos bienes de consumo y dos consumidores con las siguientes funciones de utilidad y dotaciones iniciales:*

$$\begin{aligned} u^1(x_1,x_2) &= x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}},\ w^1=(12,3) \\ u^2(x_1,x_2) &= x_1x_2,\ w^2=(4,6) \end{aligned}$$

1. *Caracterice el conjunto de asignaciones Pareto eficientes.*

2. *Caracterice en núcleo de ésta economía*

3. *Encuentre el equilibrio Walrasiano*

4. *Verifique que las asignaciones encontradas en el numeral anterior pertenecen al núcleo.*

Ejercicio 34 *Encuentre los equilibrios de las siguientes economías:*

1. $u^1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, $u^2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, $w^1 = (2, 1)$ *y* $w^2 = (1, 1)$.

2. $u^1(x_1, x_2) = x_1^{0,6} x_2^{0,6}$, $u^2(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,4}$, $w^1 = (2, 2)$ *y* $w^2 = (0, 0)$.

3. *(Más difícil) Para* $0 < a < 1$ *y* $0 < b < 1$, $u^1(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$, $u^2(x_1, x_2) = x_1^b x_2^{1-b}$, w^1 *y* w^2 *arbitrarios.*

10.5.1. La ley de Walras

Retomemos el ejemplo **??**. Supongamos que sólo hubiéramos buscado los precios que ajustan la oferta y la demanda del bien 1:

$$x_1^1(p_1, p_2) + x_1^2(p_1, p_2) = w_1^1 + w_1^2$$

Es decir que,

$$\frac{1}{2}\frac{p_1 + p_2}{p_1} + \frac{1}{2}\frac{p_1 + p_2}{p_1} = 1 + 1$$

o, lo que es igual:

$$\frac{p_1 + p_2}{p_1} = 2$$

Si normalizamos $p_1 = 1$, es claro que $p_2 = 1$ soluciona el problema.

Lo importante que tenemos que observar es que ¡sólo considerando el bien 1, obtenemos los mismos precios de equilibrio que cuando consideramos ambos bienes! Es obvio que estos precios también equilibran el mercado del bien 2.

Nota técnica 7 *Nótese que para que nuestros argumentos sean válidos necesitamos suponer que cada agente, al escoger óptimamente su canasta de consumo, siempre escoge un punto en la linea presupuestal. Para esto es suficiente suponer monotonicidad.*

10.6. Un ejemplo

El ejemplo que hemos venido trabajando es didáctico en el sentido de que todo es muy sencillo, pero tiene el probelma de que puede dar impresiones erróneas. A continuación trabajamos un ejemplo en el que las cosas no funcionan tan bien. Debe notarse que en este caso, aunque las preferencias no son estrictamente monótonas ni estrictamente cuasicóncavas, sí son monótonas y cuasicóncavas:

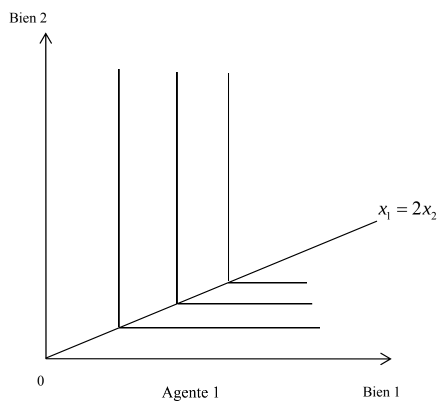
Suponemos que

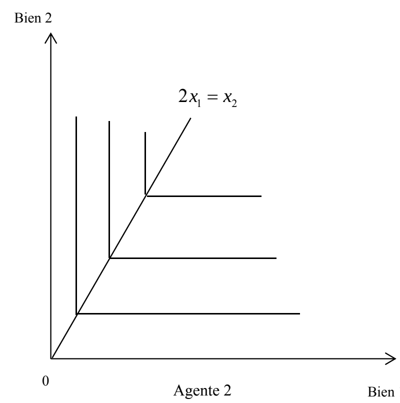
$$\begin{aligned}
u^1(x_1, x_2) &= \text{mín}\{x_1, 2x_2\} \\
u^2(x_1, x_2) &= \text{mín}\{2x_1, x_2\} \\
w^1 &= (3, 1) \\
w^2 &= (1, 3)
\end{aligned}$$

Nuestro objetivo es encontrar el equilibrio general, la curva de contrato y el núcleo, y verificar las relaciones existentes entre ellos:

10.6.1. Curvas de indiferencia y la caja de Edgeworth

Los mapas de indiferencia de los agentes son:





Y por lo tanto la Caja de Edgeworth es:

10.6.2. Curva de contratos

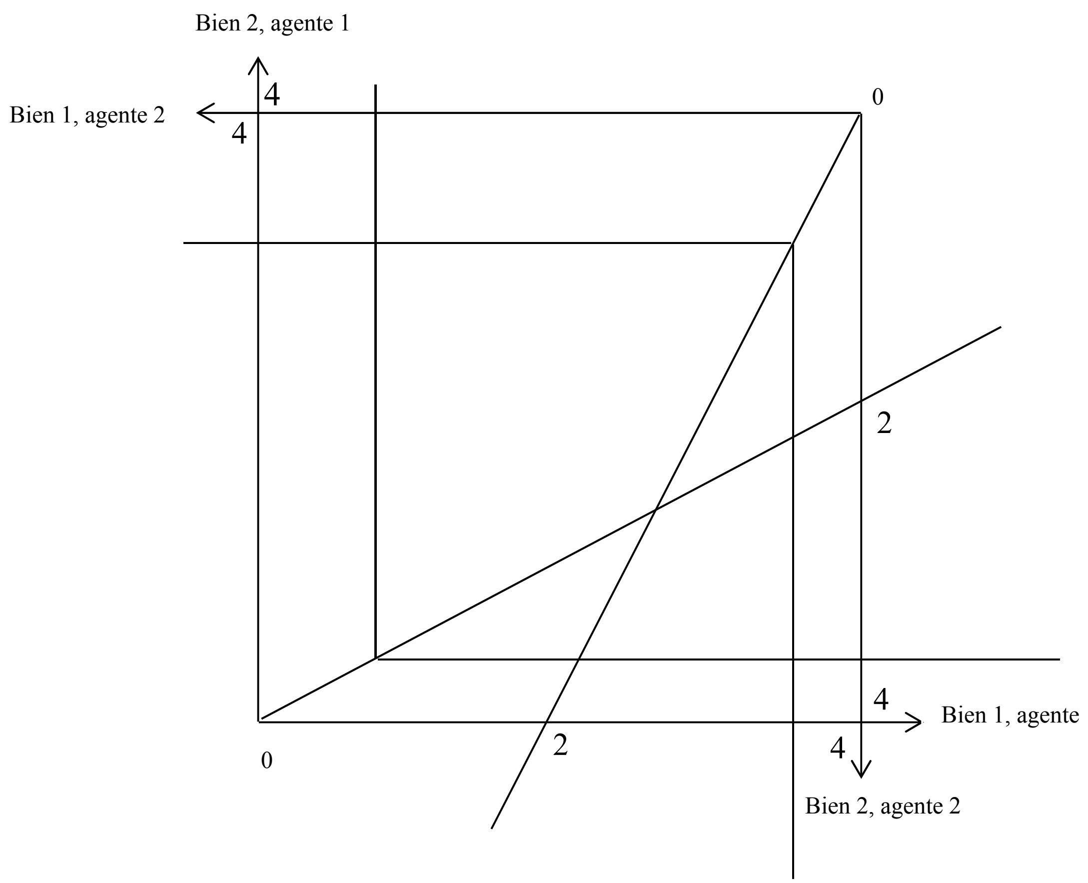
De las preferencias de los agentes es obvio que la curva de contratos es el área sombreada en el siguiente gráfico:

10.6.3. El núcleo

Dadas las dotaciones iniciales, se tiene que el núcleo es el área sombreada en el siguiente gráfico:

10.6.4. Equilibrio general

Existen infinitos equilibrios generales: $\left(\overline{p}, \overline{x}^1, \overline{x}^2\right) = \left((1,1), \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)\right), \left((1,0), \left(3, x_2^1\right), \left(1, 4 - x_2^1\right)\right)$ con $x_2^1 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ o $\left((0,1), \left(1, x_2^1\right), \left(3, 4 - x_2^1\right)\right)$ con $x_2^1 \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$.

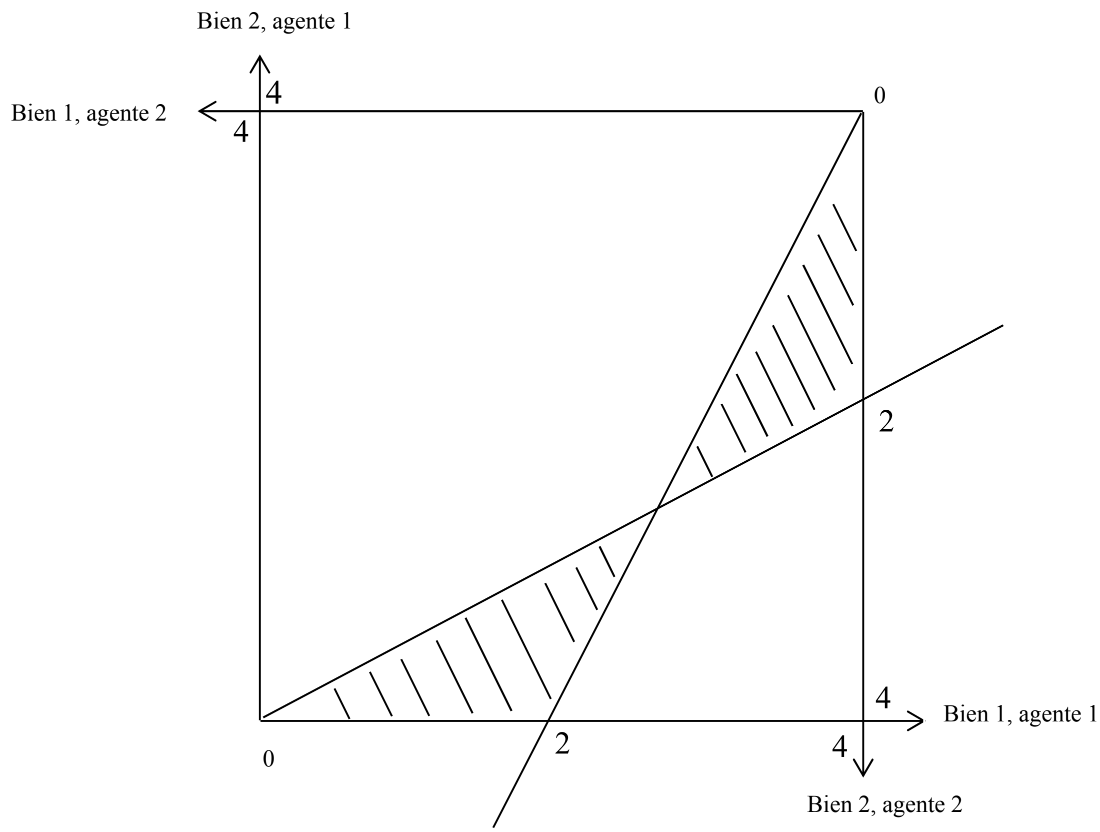


Nota técnica 8 *Obsérvese que aún con precios de algunos bienes iguales a cero, el problema del consumidor de los agentes tiene solución.*

Estos corresponden a la interseccion de las rectas que definen las preferencias de cada agente y los dos segmentos paralelos a los ejes que delimitan el núcleo de la economía.

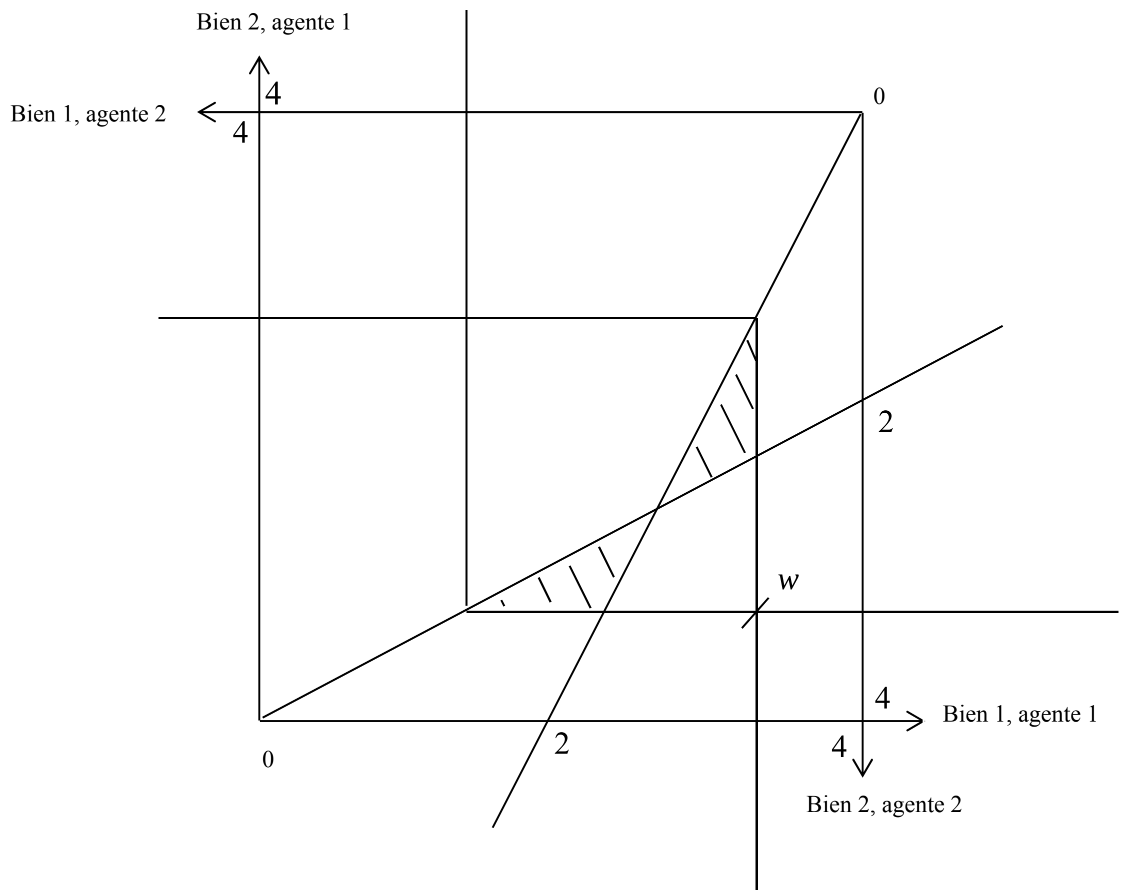
Nota técnica 9 *Nótese que hubiera sido mejor normalizar los precios a* $p_1 + p_2 = 1$.

Ejercicio 35 *Aliprantis et al [1990]. Suponga que* $L = 2$, $I = 2$ *y* $u^1(x_0, x_1) = (x_1 + 1)\exp(x_0)$, $\omega^1 = (2, 1)$, $u^2(x_0, x_1) = x_0 x_1$ *y* $\omega^2 = (2, 3)$. *Calcular los equilibrios de esta economía, la curva de contrato, el núcleo y dibujar todo en una caja de Edgeworth.*



11. Análisis positivo del equilibrio Walrasiano

En la sección anterior planteamos varios interrogantes fundamentales para evaluar el concepto de equilibrio Walrasiano. A continuación analizamos algunos de estos interrogantes. Vamos a presentar dos formas alternativas para demostrar la existencia del equilibrio Walrasiano. La primera es más intuitiva desde el punto de vista económio y hace explícito un mecanismo de formación de precios que, aunque irrealista, formaliza nuestra idea intuitiva de precios que varian según los excesos de demanda hasta igualarse a cero. La segunda alternativa es muy intuitiva desde el punto de vista geométrico.



11.1. Existencia I

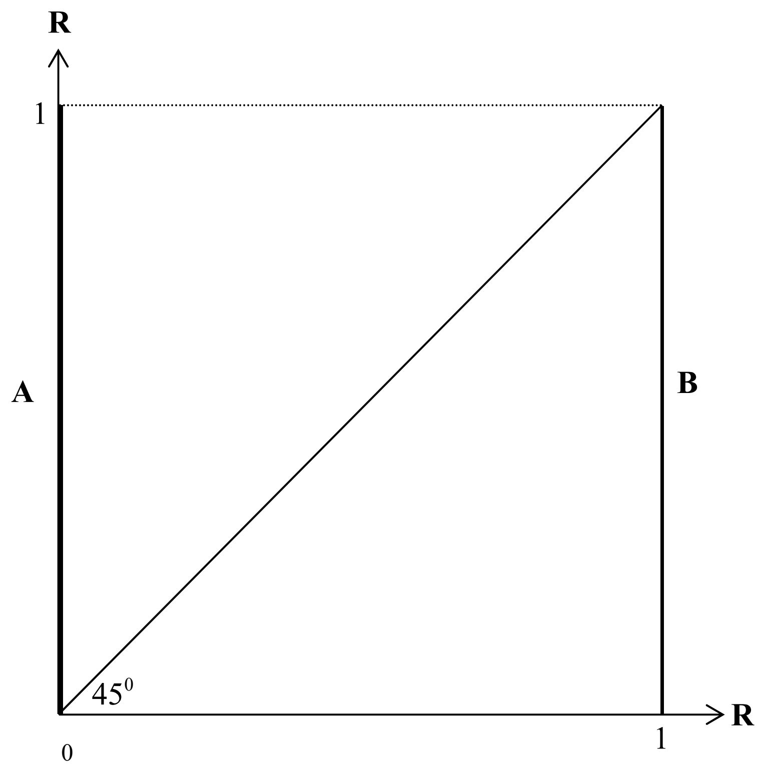
11.1.1. Una introducción a los Teoremas de Punto Fijo

Considere el siguiente problema: dado el siguiente gráfico,

intentemos trazar una gráfica continua que conecte el tramo A con el tramo B y no cruce la diagonal de 45^o. Esto es evidentemente imposible. Como en el siguiente gráfico,

cualquier gráfica continua tendrá por lo menos un punto en el cual la coordenada horizontal será igual a la coordenada vertical. Esto es:

Teorema 16 *Para cualquier función* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *que sea continua, existe* $x^* \in [0, 1]$ *tal que* $f(x^*) = x^*$.



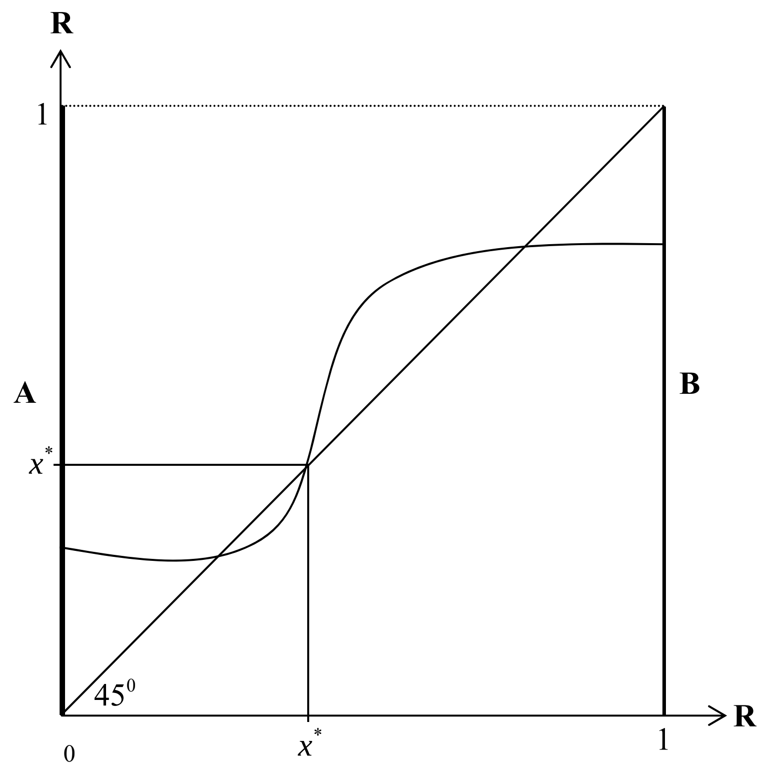
Este ejemplo ha sido didáctico, pero no tiene la generalidad que uno quisiera. En general, f no tiene que ser una función que relacione $[0, 1]$ con sí mismo. Lo que necesitamos es lo siguiente: (i) que la función sea continua; (ii) que el dominio y el codominio sean el mismo conjunto; (iii) que este conjunto tenga un principio y un fin, es decir, que no vaya hasta infinito o hasta menos infinito (acotado); (iv) que el conjunto contenga sus puntos límite, o su borde (cerrado); (v) que uno pueda trazar una línea entre dos puntos cualesquiera de este conjunto, sin que ésta se salga del conjunto (convexo). Con estas propiedades, uno siempre encontrará un punto en el dominio que sea igual a su imágen bajo f.

Por ejemplo, si tomamos el siguiente conjunto:

$$\triangle^1 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid p_1 + p_2 = 1\}$$

que tiene la siguiente forma

y es por tanto, acotado, cerrado y convexo, y trazamos una función cualquiera,



$$f : \triangle^1 \rightarrow \triangle^1$$

que sea continua, siempre existirá (p_1^*, p_2^*) tal que

$$f(p_1^*, p_2^*) = (p_1^*, p_2^*)$$

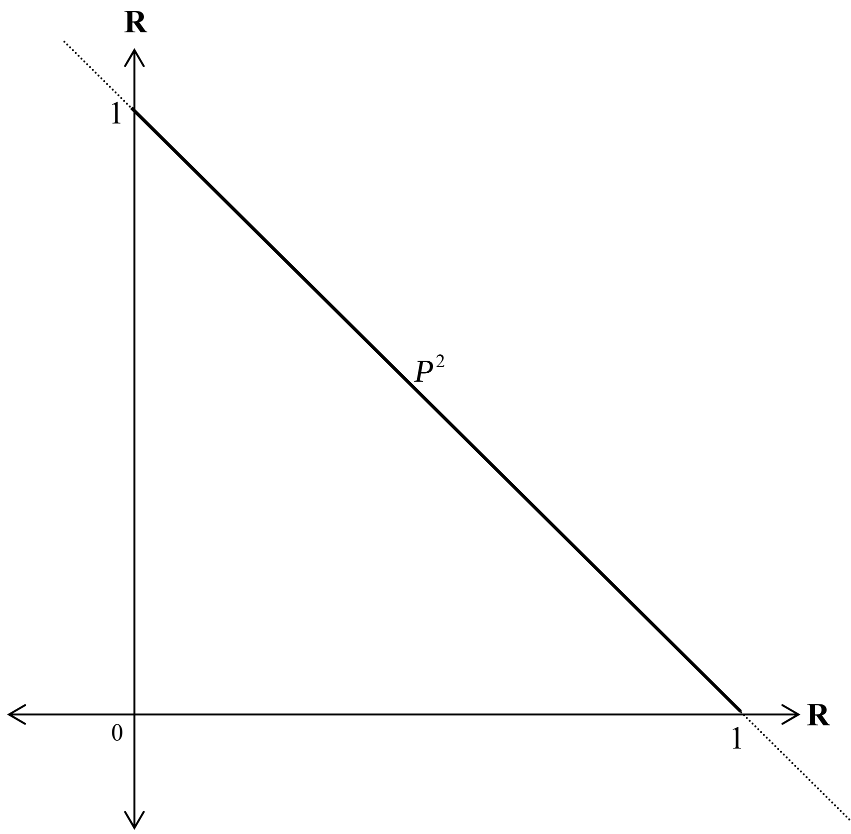
Esto lo podemos hacer para cualquier dimensión: si tenemos $L \geq 1$ bienes, y definimos

$$\triangle^{L-1} = \{(p_1, p_2, ..., p_L) \in \mathbb{R}_+^L \mid \sum_{l=1}^{L} p_l = 1\}$$

entonces,

Teorema 17 *Para cualquier función* $f : \triangle^{L-1} \rightarrow \triangle^{L-1}$ *que sea continua, existe un punto* $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_L^*)$ *tal que*

$$f(p^*) = p^*.$$



11.1.2. El Subastador Walrasiano

Walras tenía en mente un proceso de ajuste de precios que correspondedía a lo siguiente. Si un mercado muestra exceso de demanda, su precio (relativo) debe subir, y si un mercado muestra exceso de oferta, su precio (relativo) debe bajar.

Lo más cercano que tenemos a un proceso dinámico de ajuste fué un artefacto que Walras denominó el Subastador (Tatonador) y que hacía exactamente lo que hemos dicho previamente: mover los precios en la dirección indicada por los excesos de demanda.

Así, supongamos que tenemos una economía como como la descrita anteriormente. Sea $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, y definamos la demanda agregada de la economía (como función únicamente de los precios), $F(p)$ como:

$$F(p) = \sum_{i=1}^{I} f^i(p)$$

y la función de exceso de demanda (como función unicamente de los precios) como:

$$Z(p) = (Z_1(p), Z_2(p), ..., Z_L(p)) = F(p) - \sum_{i=1}^{I} w^i$$

Nota técnica 10 *La función exceso de demanda caracteriza unívocamente los precios de equilibrio. Es decir, $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ es un equilibrio Walrasiano sí y solo si $Z(p) = 0$.*

Proposición 14 *La función exceso de demanda satisface:*

1. *Es continua como función de los precios.*
2. *Es homogénea de grado cero en los precios.*
3. *Satisface $p \cdot Z(p) = 0$. Ésta ecuación es una forma equivalente de la ley de Walras.*

Ejercicio 36 *Demuestre que la propiedad* 3 *es equivalente a la ley de Walras.*

Como la función exceso de demanda es también homogénea de grado cero. Por lo tanto, vamos a normalizar los precios de tal forma que estos se encuentren en el simplejo $L-1$ dimensional estrictamente positivo $\Delta^{L-1}_{++} = \left\{ p \in \mathbb{R}^L_{++} : \sum_{l=1}^{L} p_l = 1 \right\}$.

Lo que el subastador va a hacer es subir los precios de aquellos bienes l para los cuales $Z_l(p) > 0$ (exceso de demanda) y bajar los precios de aquellos para los cuales $Z_l(p) < 0$ (exceso de oferta).

La forma más sencilla de lograr esto sería la siguiente. Ante los precios p el subastador reaccionaría definiendo los nuevos precios:

$$p' = p + Z(p)$$

Aquí, sin embargo, el subastador encontraria dos problemas. Para un bien con un "gran" exceso de oferta, el precio p'_l que él definiría sería negativo. Y por otro, si $p \in \Delta^{L-1}_{++}$, $p' = p + Z(p) \notin \Delta^{n-1}_{++}$ excepto cuando $Z(p) = 0$. Para evitar estos problemas, utilizaremos la siguiente modificación del mecanismo de ajuste. Sea $T : \Delta^{L-1}_{++} \to \Delta^{L-1}_{++}$ definida por:

$$T(p) = \frac{1}{\sum_{l=0}^{L} (p_l + \max\{0, Z_l(p)\})} (p_1 + \max\{0, Z_1(p)\}, ..., p_L + \max\{0, Z_L(p)\})$$

Ejercicio 37 *¿Sigue siendo cierto que cuando existe un exceso de demanda por un bien el subastador Walrasiano aumenta el precio de este?*

Utilizando la definición anterior del mecanísmo de ajuste del subastador Walrasiano, es relativamente sencillo identificar los precios de equilibrio.

Proposición 15 (Teorema de Existencia del Equilibrio) *Sea* $\mathcal{E} = \left(\mathcal{I}, \left(u^i, \omega^i\right)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ *una economía que satisface las propiedades usuales. Obsérvese que, si la función exceso de damanda es continua, entonces la función de ajuste del subastador Walrasiano* T*, también es continua. Además, si* T *tiene un punto fijo* $p^* \in \Delta_{++}^{n-1}$*, entonces* $Z(p^*) = 0$*.*
Prueba. *Como* p^* *es punto fijo de* T *entonces,* $p_l^* = \frac{1}{\sum\limits_{l=0}^{L}\left(p_l^*+\text{máx}\{0,Z_l(p^*)\}\right)}\left(p_l^* + \text{máx}\{0, Z_l(p^*)\}\right)$ *para todo* l*. Multiplicando por* $Z_l(p^*)$ *en ambos lados y sumando sobre todos los bienes podemos utilizar la ley de Walras y obtenemos que* $\sum\limits_{l=0}^{n}\left(\text{máx}\{0, Z_l(p^*)\}\right) Z_l(p^*) = 0$*, luego* $Z(p^*) \leq 0$*. Ahora, usando la ley de Walras de nuevo y el hecho de que* $p^* \in \mathbb{R}_{++}^n$*, entonces* $Z(p^*) = 0$*.* ■

Por supuesto, la dificultad radica en demostrar la existencia del punto fijo. Intuitivamente una aproximación sería aplicar el el Teorema del Punto de Fijo (Teorema 17) sin embargo, si bien el conjunto Δ_{++}^{L-1} es convexo, este no es compacto (es acotado pero no es cerrado) pues nosotros hemos desarrollado toda la teoría asumiendo que los precios son estrictamente positivos.

11.2. Existencia II

Una forma alternativa de probar la existencia del equilibrio Walrasiano en una economía de intercambio es utilizando el siguiente teorema (conocido como el teorema de existencia de ceros de campos vectoriales o el teorema de la "peineta"). En realidad, se puede demostrar que este teorema esta intimamente relacionado con el teorema del punto fijo de la sección anterior sin embargo, en esta forma, nos permitirá dar una demostración esencialmente geométrica del teorema de existencia del equilibrio. Para esto, definamos la esfera $L-1$ dimensional estrictamente positiva como el conjunto:

$$S_{++}^{L-1} = \{(p_1, p_2, ..., p_L) \in \mathbb{R}_{++}^L \mid \sum_{l=1}^{L} p_l^2 = 1\}$$

Teorema 18 *Sea* $f : S_{++}^{L-1} \to R^L$ *un campo vectorial contínuo que apunta hacia dentro. Es decir,* $f(p) \cdot p = 0$ *(*f *es un campo vectorial) y si* $\{p_n\}_{n=1,...}$ *es una sucesión de precios en* S_{++}^{L-1} *tal que* $p_n \to p \in \partial S_{++}^{L-1}$ *entonces* $\{f(p_i)\}_{i=1...}$*, es una sucesión no acotada por encima (*f *apunta hacia .ªdentro"). Entonces* f *tiene un cero en* S_{++}^{L-1}*. Es decir, existe* $p^* \in S_{++}^{L-1}$ *tal que* $f(p^*) = 0$*.*

Con la ayuda de este teorema podemos dar una demostración del teorema de existencia del equilibrio. Por la ley de Walras, obsérvese que para todo $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, $Z(p) \cdot p = 0$ luego la función exceso de demanda es un campo de vectores. Puesto que Z es continua y su comportamiento en el borde de la esfera $L-1$ dimensional es como en el teorema anterior, entonces Z tiene un cero y este es un equilibrio Walrasiano.

11.3. El teorema SMD

De manera independiente, tres economistas, Hugo Sonnenschein, Rolf Mantel y Gerard Debreu, estudiaron las propiedades que la estructura habitual del modelo de equilibrio general impone en la función de exceso de demanda agregada, Z. Es decir, ellos se preguntaron hasta que punto una economía $\mathcal{E} = \left(\mathcal{I}, \left(u^i, \omega^i\right)_{i \in \mathcal{I}}\right)$ que satisface las condiciones usuales, caracteriza la función exceso de demanda. La respuesta que ellos dieron a este problema fué negativa. Es decir, ellos encontraron que el hecho de que la función de demanda proviniera de una economía que satisface las propiedades usuales imponia muy pocas restricciones sobre la función exceso de demanda. En particular, estas son:

1. La función exceso de demanda (como una función de precios) es una función continua.

2. La función exceso de demanda (como función de precios) es homogénea de grado cero.

3. La función exceso de demanda satisface la ley de Walras. Para todo $p \in \mathbb{R}^n_{++}$,
$$\sum_{l=1}^{n} p_l Z_l(p) = 0$$

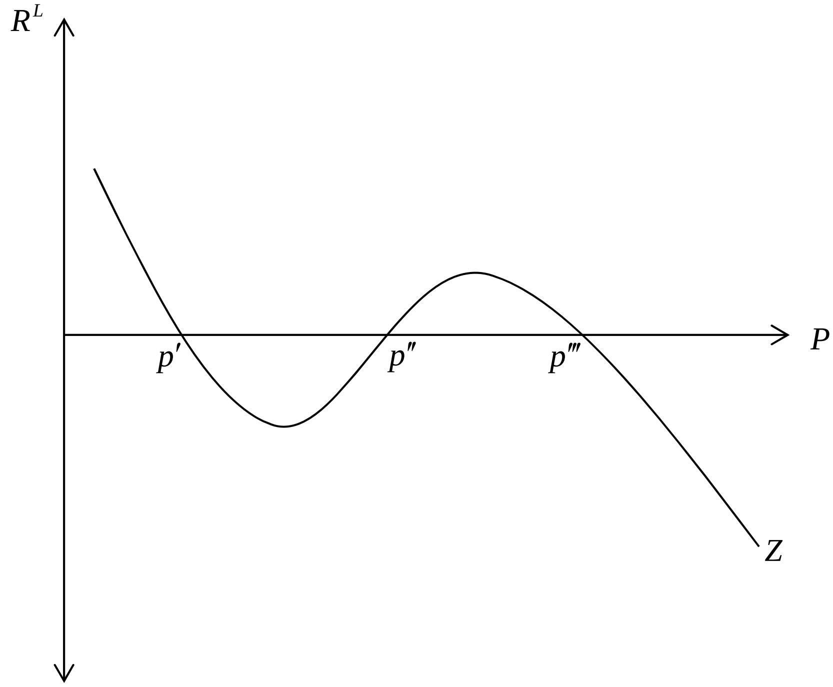
El resultado que Sonnenschein, Mantel y Debreu obtuvieron puede resumirse informalmente de la siguinete manera. Dada cualquier función definida $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$, que satisfaga las tres propiedades anteriores, existe una economía $\mathcal{E} = \left(\mathcal{I}, \left(u^i, \omega^i\right)_{i \in \mathcal{I}}\right)$, con por lo menos un número mayor o igual de agentes que de bienes de consumo, que satisface las propiedades habitulaes y tal que la función f es igual a la función exceso de demanda Z de la economía $\mathcal{E}$.

Este resultado se conoce como el teorema Sonnenschein, Mantel y Debreu (o SMD). A continuación vamos a utilizar este resultado para estudiar otras propiedades positivas del modelo de Equilibrio General.

11.4. Unicidad

Lo primero que se concluye del teorema de SMD es que no hay por qué esperar que el equilibrio sea único: no hay ninguna razón por la cual la función Z de una economía sólo deba tener un precio p normalizado tal que $Z(p) = 0$.

Por ejemplo, ignorando la dimensionalidad del problema, uno podría tener que Z es como en el siguiente gráfico.[12]

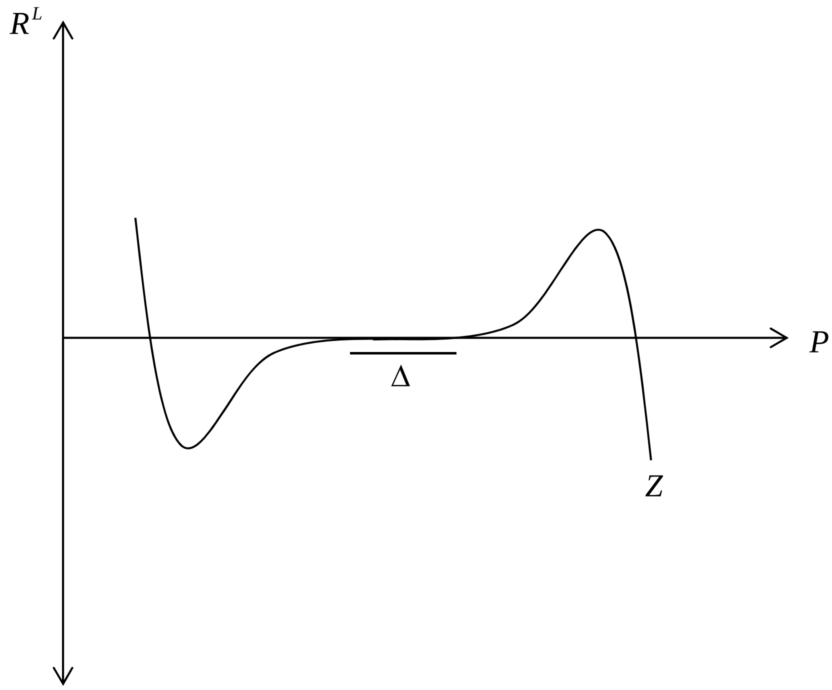


En cuyo caso tendríamos tres precios (normalizados) de equilibrio. Esto no debería resultar sorprendente. Por una parte, nosotros ya hemos obtenido multiplicidad de equilibrios en algunos de nuestros ejemplos; y por otra, los teoremas de punto fijo, como el que utilizamos para demostrar existencia, aseguran que existe por lo menos un punto fijo pero no que sea necesariamente único.

De hecho, Arrow demostró que las condiciones para que el equilibrio sea único son extremas (básicamente, que todos los agentes tengan funciones de utilidad Cobb-Douglas). Debreu, sin embargo, estaba preocupado por un problema más complicado. Nada garantiza que la función Z no sea como a continuación:

En cuyo caso uno tendría un número infinito de equilibrios, y lo que es más grave, tendría un continuo de equilibrios. El problema sería que en una situación

[12] ¿Por qué? Supongamos que tenemos dos bienes. El eje x representa el precio relativo entre los dos bienes. El eje y representa el exceso de demanda de uno de los dos bienes. Por la ley de Walras, esta gráfica determina la función exceso de demanda del otro bien y, por construcción, esta función exceso de demanda satisface las tres condiciones del teorema de SMD.



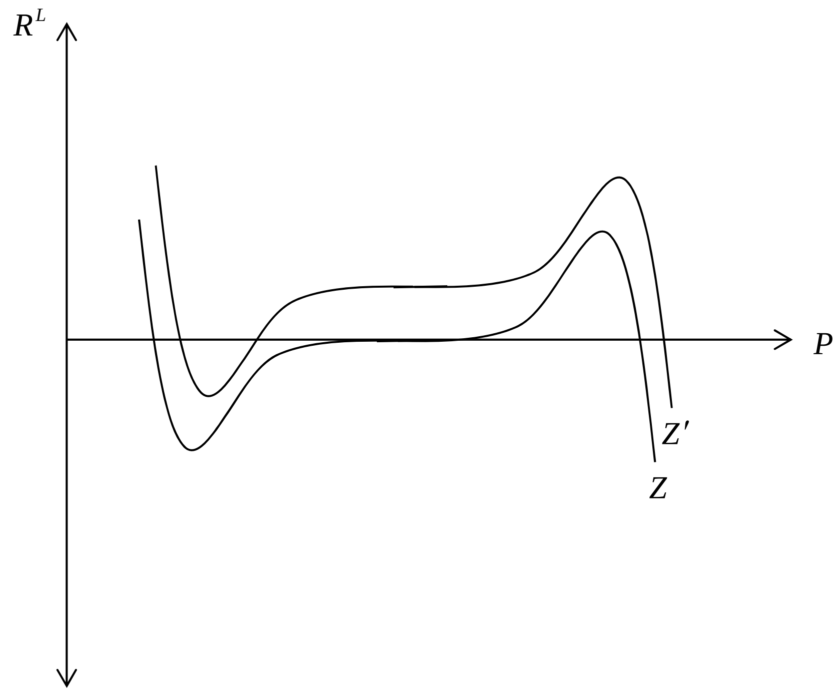
como esta los equilibrios ni siquiera son únicos en un sentido local: ¡se encuentran infinitamente cerca! Debreu demostró, sin embargo, que esto "casi nunca" pasa. De manera informal supongamos que las dotaciones de la economía no hubieran sido las que generaron el gráfico Z anterior, sino otras levemente diferentes. Uno entonces, esperaría una función Z' como a continuación:

donde sólo un número finito de equilibrios (todos ellos aislados) se presenta. Necesitaría uno una tremenda coincidencia para que fuera Z y no Z' la función de demanda agregada de la economía.

En síntesis, no hay razón para esperar que el Equilibrio General sea único, pero casi siempre uno encuentra que es localmente único.

Ejemplo 29 *(Mas-Colell et. al.) Considere la siguinete economía.* $L = 2$, $I = 2$, $w^1 = (2, r)$, $w^2 = (r, 2)$ *y* $r = 2^{\frac{8}{9}} - 2^{\frac{1}{9}} > 0$. *Las funciones de utilidad son:*

$$\begin{aligned} u^1(x_1, x_2) &= x_1 - \frac{x_2^{-8}}{8} \\ u^2(x_1, x_2) &= -\frac{x_1^{-8}}{8} + x_2 \end{aligned}$$



Es fácil ver que los precios de equilibrio deben satisfacer:

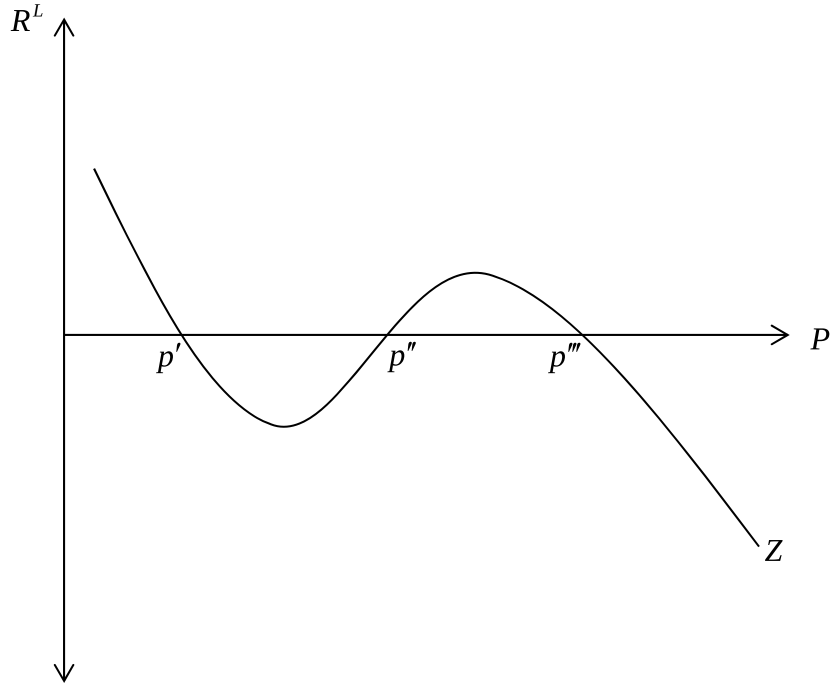
$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{1}{9}} + 2 + r\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{8}{9}} = 2 + r$$

luego $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}, 1$ *y* 2 *son precios de equilibrio.*

11.5. Estabilidad

Como ya hemos dicho, la definición de Equilibrio General carece de un mecanismo natural que explique cómo evoluciona la economía cuando uno se encuentra por fuera de equilibrio. Hemos propuesto el mecanismo del subastador Walrasiano, que, sin ser natural, parece aceptable. Nótese, sin embargo, que bajo este mecanismo el equilibrio general no tiene por qué ser estable (aún localmente). Como vimos anteriormente, del Teorma de SMD se sigue que Z puede ser como a continuación:

p'', aún siendo un equilibrio, ¡no es estable bajo el subastador Walrasiano!



11.6. Refutabilidad

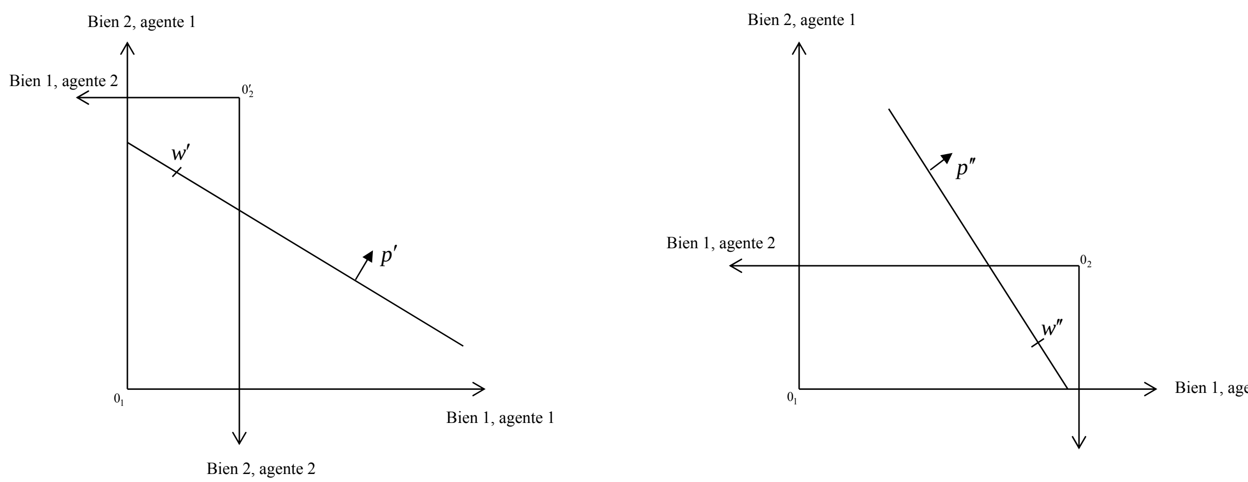
Note cómo hemos utilizado hasta ahora el teorema de SMD. Hemos aprovechado el resultado para argumentar que no podemos descartar funciones exceso de demanda agregada, a pesar de lo ”mal comportadas” que éstas puedan resultar. Pareciera como si cualquier cosa fuera compatible con la teoría del equilibrio general, como si uno nunca pudiera refutar la hipótesis de equilibrio general.

Esto resultaría problemático, pues según una importante corriente epistemológica conocida como ”falsificacionismo”, sólo las teorías que son refutables son conocimiento científico.

En efecto, durante mucho tiempo los economistas creíamos que del teorema de SMD se desprendía que la hipótesis de equilibrio general no era refutable.

Muy recientemente se ha demostrado que esto no es así. Cuando uno utiliza el teorema de SMD está manteniendo las dotaciones fijas y permitiendo sólo a los precios variar. Donald Brown y Rosa Matzkin han demostrado que si uno permite que las dotaciones sean observables, uno puede refutar la hipótesis de equilibrio general. Es decir, la existencia de una economía que satisface las propiedades usuales y tal que sus equilibrios sean consistentes con los datos observados.

Por ejemplo, tomemos una economía 2×2 en la que se han observado las siguientes dotaciones y precios:



Sobreponiendo los dos gráficos, obtenemos las asignaciones que serían factibles en cada caso como equilibrio general (las partes más gruesas de cada gráfico).

Claramente, tales observaciones son inconsistentes con maximización individual. Más aún, no es posible que el agente 1 satisfaga el axioma débil de las preferencias reveladas. Esto implica que es imposible que dadas las observaciones de dotaciones y precios, al mismo tiempo los agentes maximizen su bienestar y los mercados se agoten: ¡es posible refutar la hipótesis de Equilibrio General!.

12. Análisis normativo del equilibrio Walrasiano

12.1. Los teoremas fundamentales de la economía del bienestar

En esta sección analizamos las relaciones existentes entre las asignaciones de equilibrio Walrasiano y la eficiencia de Pareto.

12.1.1. El primer teorema

Recordemos los ejemplos 26 y **??** y los ejercicios que les siguieron. Allí observamos que las asignaciones de equilibrio competitivo eran todas eficientes de Pareto. Nuestro primer resultado es que esto no es una coincidencia:

Teorema 19 (El primer teorema fundamental de la economía del bienestar) *Dada una economía de intercambio con preferencias neoclásicas, si* $\left(p, \left(x^1, x^2, ..., x^I\right)\right)$ *es un equilibrio Walrasiano, entonces* $\left(x^1, x^2, ..., x^I\right)$ *es eficiente en el sentido de Pareto.*

Muchos de los resultados de la teoría del equilibrio general requieren métodos matemáticos muy complejos para su demostración formal. Este teorema, a pesar de su importancia, es una notable excepción, razón por la cual a continuación presentamos su prueba completa.

Prueba. Supongamos que $\left(p, \left(x^1, x^2, ..., x^I\right)\right)$ es un equilibrio Walrasiano, pero $\left(x^1, x^2, ..., x^I\right)$ no es eficiente en el sentido de Pareto. Entonces, existe $\left(\widehat{x}^1, \widehat{x}^2, ..., \widehat{x}^I\right)$ tal que:

1. $\sum_{i=1}^{I} \widehat{x}^i = \sum_{i=1}^{I} w^i$
2. Para todo i, $u^i\left(\widehat{x}^i\right) \geqslant u^i\left(x^i\right)$
3. Para algún i^*, $u^{i^*}\left(\widehat{x}^{i^*}\right) > u^{i^*}\left(x^{i^*}\right)$

Por definición de equilibrio, se sigue de la condición (3) que $p \cdot \widehat{x}^{i^*} > p \cdot x^{i^*}$, mientras que la condición (2) implica que, para todo i, $p \cdot \widehat{x}^i \geqslant p \cdot x^i$. Sumando para todos los agentes, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot \widehat{x}^i > \sum_{i=1}^{I} p \cdot x^i$$

de donde se deduce que

$$p \cdot \sum_{i=1}^{I} \widehat{x}^i > p \cdot \sum_{i=1}^{I} x^i = p \cdot \sum_{i=1}^{I} w^i$$

lo cual contradice la condición 1. ■

El punto de la demostración es simple: asignaciones que serían preferibles para los consumidores deben costar más y, por tanto no pueden ser factibles si nos encontramos en equilibrio general.

El teorema es de fundamental importancia para las autoridades de política económica: si una economía satisface los supuestos del modelo de equilibrio Walrasiano y se encuentra en equilibrio, las medidas de política económica que pretendan mejorar el bienestar de algún individuo, manteniendo las dotaciones fijas, necesariamente irán en detrimento del bienestar de alguien más. Esta idea no es para nada nueva: ¡es lo que Adam Smith llamaba la "Mano Invisible"!

Nota técnica 11 *En la demostración hemos utilizado el supuesto de que cualquier cantidad positiva, por pequeña que sea, de cualquier bien mejora el bienestar de cualquier agente. Esto lo hemos hecho para descontar la posibilidad de que los agentes tengan curvas de indiferencia gruesas. Un ejercicio interesante sería mostrar que, aún en una economía 2×2, si un agente tiene curvas de indiferencia gruesas la conclusión del teorema no se cumple.*

Ejercicio 38 *Una asignación factible de recursos en una economía se dice libre de envidia si ningún agente preferiría estrictamente tener la asignación que a otro le corresponde.*

1. *¿Cómo podríamos redistribuir la dotación total de la economía, de tal manera que el equilibrio resultante bajo competencia perfecta sea libre de envidia y eficiente de Pareto?*

2. *Una asignación es justa (fair) si es, a la vez, libre de envidia y eficiente en sentido de Pareto. En una caja de Edgeworth, demuestre que las asignaciones libres de envidia no necesariamente son justas.*

12.1.2. El segundo teorema

En el primer teorema la pregunta es si una asignación de equilibrio es eficiente. El segundo teorema se plantea la pregunta inversa: si tomamos una asignación eficiente, ¿podemos garantizar que esta sea de equilibrio competitivo?

La respuesta a la pregunta así planteada es obviamente negativa: dadas unas dotaciones, ya sabemos que hay asignaciones que, aun siendo eficientes, no podrían resultar de intercambios voluntarios. El punto está en si mantenemos las dotaciones iniciales fijas o permitimos redistribuciones de ellas (que no alteren la dotación agregada). El segundo teorema fundamental de economía del bienestar resuelve este problema: bajo nuestros supuestos, si permitimos redistribución de las dotaciones iniciales, entonces cualquier asignación eficiente puede ser implementada en un equilibrio general. Formalmente:

Teorema 20 (El segundo teorema fundamental de economía del bienestar) *Dada una economía constituída por preferencias $\left(u^1, u^2, ..., u^I\right)$ y dotaciones $\left(w^1, w^2, ..., w^I\right)$, si $\left(x^1, x^2, ..., x^I\right)$ es una asignación eficiente entonces existe una redistribución de las dotaciones $\left(\widehat{w}^1, \widehat{w}^2, ..., \widehat{w}^I\right)$ y unos precios $p = (p_1, p_2, ..., p_L)$ tales que:*

1. $\sum_{i=1}^{I} \widehat{w}^i = \sum_{i=1}^{I} w^i$

2. $\left(p, \left(x^1, x^2, ..., x^I\right)\right)$ *es un equilibrio Walrasiano de la economía constituída por preferencias* $\left(u^1, u^2, ..., u^I\right)$ *y dotaciones* $\left(\widehat{w}^1, \widehat{w}^2, ..., \widehat{w}^I\right)$.

La implicación del teorema es que si una autoridad de política económica desea imponer una asignación eficiente, no necesita cerrar los mercados. Por el contrario, puede limitarse a redistribuir las dotaciones (política fiscal) de manera adecuada y luego permitirle a los mercados actuar, pues éstos deberían llevar a la economía a la asignación deseada.

Infortunadamente, y en contraste con el caso de primer teorema, la prueba de este segundo teorema es muy complicada y nos vamos a limitar a una ilustración gráfica en el caso 2×2. El argumento es simple. Considere la siguiente gráfica:

La asignación x, aunque eficiente, no puede ser de equilibrio con las dotaciones iniciales w (¿por qué no?). Sin embargo, si trazamos la tangente a ambas curvas de indiferencia en el punto x, es claro que simplemente con redistribuir las dotaciones a un punto sobre esta recta, como por ejemplo $\widehat{w}$, o el mismo punto x, obtenemos que los precios p, que están implícitos en la pendiente de esta tangente, y la asignación x son equilibrio bajo las nuevas dotaciones.

Este teorema tampoco está libre de supuestos. En este caso, la forma de las curvas de indiferencia es clave. Si, contrario a nuestros supuestos, las curvas de indiferencia del agente 1 fueran como a continuación,

entonces la conclusión del teorema no aplicaría, como podemos ver en el siguiente gráfico:

Aquí, la asignación $x = \left(x^1, x^2\right)$ es punto de Pareto. Para "convencer" al agente 2 de demandar x^2, necesitaríamos unas dotaciones como $\widehat{w}$ y los precios p. Sin embargo, el agente 1 no querría demandar x^1 bajo su restricción presupuestal correspondiente, pues una canasta como $a = (a_1, a_2)$ le resultaría superior y factible.

12.1.3. El equilibrio general y el núcleo

Otra observación casual de los ejemplos 27 y **??** (y los ejercicios que les siguieron) fue que, aparentemente, las asignaciones de equilibrio pertenecen al núcleo de la economía. Esto es efectivamente así:

Teorema 21 *Dada una economía como la que hemos descrito, si* $\left(p, \left(x^1, x^2, ..., x^I\right)\right)$ *es un equilibrio general, entonces* $\left(x^1, x^2, ..., x^I\right)$ *pertenece al núcleo de la economía.*

Prueba. Si uno entiende la prueba del teorema 19, le debe resultar sencillo demostrar este resultado. ■

Ejercicio 39 *Demostrar el anterior teorema y responder a las siguientes preguntas.*

1. *Es necesario suponer que las preferencias son neoclásicas para la validez del resultado?*

2. *Es necesario que las funciones de utilidad que representan las preferencias sean continuas?*

3. *Es necesarios que la función de utilidad sea cuasicóncava?*

4. *Es necesario que la función de utilidad sea monótona?*

Teorema 22 *Dada una economía de intercambio constituída por preferencias* $\left(u^1, u^2, ..., u^I\right)$ *y dotaciones* $\left(w^1, w^2, ..., w^I\right)$*, si la asignación* $\left(x^1, x^2, ..., x^I\right)$ *está en el núcleo de la economía, entonces existe una redistribución de las dotaciones* $\left(\widehat{w}^1, \widehat{w}^2, ..., \widehat{w}^I\right)$ *y unos precios* $p = (p_1, p_2, ..., p_L)$ *tales que:*

1. $\sum_{i=1}^{I} \widehat{w}^i = \sum_{i=1}^{I} w^i$

2. $\left(p, \left(x^1, x^2, ..., x^I\right)\right)$ es un equilibrio Walrasiano de la economía constituída por preferencias $\left(u^1, u^2, ..., u^I\right)$ y dotaciones $\left(\widehat{w}^1, \widehat{w}^2, ..., \widehat{w}^I\right)$.

Prueba. Queda como ejercicio. ■

Lo que el teorema quiere decir es que ningún individuo ni grupo de individuos puede obtener para sí o para sus miembros una mejora, simplemente con aislarse del intercambio de equilibrio. Puesto de otra forma, el resultado es, estando en una situación de equilibrio, uno les propusiera a los agentes que hicieran trueques para mejorar sus situaciones, no habría ningún incentivo para estos trueques: en el equilibrio, las posibles ganancias del intercambio se han agotado.

Hemos encontrado que las asignaciones de equilibrio pertenecen al núcleo, pero también habíamos visto en nuestros ejemplos que hay asignaciones en el nucleo que no son de equilibrio competitivo para unas asignaciones dadas.

Lo que vamos a intentar ahora, sin embargo, va en otra dirección. Nótese que de la misma definición de núcleo uno intuye que al aumentar el número de agentes de la economía el núcleo de ésta se "reduce," pues al entrar nuevos agentes hay más coaliciones que pueden presentar objeciones.[13] Debreu y Herbert Scarf se plantearon este preciso problema: (i) ¿es cierto que el núcleo se "reduce" cuando aumenta el número de agentes? y (ii) si llevamos a infinito el número de agentes, ¿quedarán en el núcleo asignaciones que no son de equilibrio?

Para una forma muy particular de aumentar el número de agentes, las respuestas a las anteriores preguntas fueron, respectivamente, afirmativa y negativa.

El aumento de agentes que ellos consideraron fue simplemente la replicación de los agentes existentes. Su resultado es muy difícil de explicar formalmente,

[13] Utilizamos la palabra "reduce" en un sentido intuitivo, pues al entrar más agentes cambia la dimensión del espacio en el cual está definido el núcleo.

pero a continuación vamos a dar un argumento intuitivo que está muy lejos de ser perfecto. Consideremos una economía de 2×2, como la habitual:

El punto a está en el núcleo. Sin embargo, los agentes preferirían una situación en la que el agente 1 consume en c y el agente 2 en b. ¿Por qué no tienen ellos estos consumos? Porque no es posible: habría exceso de demanda por el bien 1 y exceso de oferta del 2.

Ahora, si a esta economía llegara una réplica del agente 1, quien tiene "mucho" del bien 1 y "poco" del bien 2, en el sentido de que cuando él consume en c es oferente neto de 1 y demandante neto de 2, entonces una asignación como (c, c, b) sería factible para la coalición $\{1, \text{réplica de } 1, 2\}$ y sería más deseable que la que está implícita en el punto a. La existencia de la réplica del agente 1 "eliminaría" la asignación a del núcleo.

12.1.4. La paradoja de las transferencias

Finalmente, nos ocupamos de un resultado que muestra cómo las políticas económicas pueden arrojar resultados diferentes a su propósito, si no se acompañan de un buen entendimiento de la economía. Este tipo de resultados fue inicialmente propuesto por Edgeworth, pero tuvo muy poca aceptación, pues iba en contra de la intuición común de la época. Hoy sabemos que las ideas de Edgeworth eran correctas.

Consideremos una situación de equilibrio en una economía 2×2 como a continuación.

Donde se nota que en equilibrio el agente 1 es oferente neto del bien 1 y demandante neto del bien 2.

Supongamos que, por alguna razón, la autoridad de política económica decide que debe mejorar el bienestar del agente 1. Por supuesto, la autoridad no puede aumentar la dotación agregada inicial de la economía (es decir, no puede agrandar la Caja de Edgeworth). La única herramienta de política disponible a la autoridad es la redistribución de las dotaciones iniciales. Supongamos que la autoridad realiza una política que, al menos inicialmente, parece adecuada: va a tomar de la dotación inicial del agente 2 cierta cantidad de cada bien y la va a transferir al agente 1. Al ser más rico, la autoridad espera que la situación del agente 1 sea mejor después de esta redistribución.

Wassily Leontief fue el primero en llamar la atención acerca de los riesgos de este razonamiento. El resultado fue posteriormente demostrado, en toda formalidad, por Marie-Paule Donsimoni y Herakles Polemarchakis. El argumento es el siguiente: supongamos que para el agente 1 el bien 1 es inferior y para el agente 2 este mismo bien es normal. Cuando se produce la transferencia de dotaciones, es decir a los precios p, la riqueza del agente 1 aumenta y la del agente 2 disminuye. Dado esto y nuestros supuestos acerca de las preferencias de los agentes, la demanda agregada por el bien 1 debe disminuir y, con ello, su precio relativo debe caer. ¡El problema es que el precio relativo del bien que el agente 1 ofrece a la economía está cayendo mientras que el de el bien que él demanda está aumentando! No hay ninguna razón para descartar la posibilidad de que a los nuevos precios la riqueza del agente 1 no sea suficiente para comprar la canasta que él demandaba en el equilibrio anterior a la implementación de la política.

En la gráfica, lo que estamos diciendo es que con las dotaciones w', podría ocurrir que el nuevo equilibrio sea (p', x') en cuyo caso el agente 1 se encuentra peor que son el equilibrio de las dotaciones w.

12.2. El núcleo de economías grandes

13. Economías dinámicas

Lo que hicimos en la sección sobre equilibrio general con producción ciertamente añadió realismo a nuestro modelo de equilibrio general. Quedan, sin embargo, algunas otras críticas al modelo que resultan razonables. Una de ellas, la de que el modelo ignora que las decisiones económicas de los agentes incorporan elementos dinámicos y son tomadas bajo incertidumbre, es abordada aquí. Por simplicidad, consideraremos únicamente economías de intercambio. Infortunadamente, aún bajo el anterior supuesto simplificador, el problema general supera en complejidad el nivel de este curso, razón por la cual aquí vamos a hacer sólo una breve introducción al problema.

Arrow y Debreu fueron los primeros economistas modernos en cuestionar la forma en la que los modelos económicos incorporaban el tiempo y la incertidumbre. Su trabajo inicial tocó estos problemas de la manera más fundamental posible: ¡ellos cuestionaron la forma en la que en los modelos económicos se definían los bienes! Para ellos, no era suficiente decir qué tipo de bien era el que se estaba tratando (desde la perspectiva de una descripción física del mismo). Ellos propusieron que al describir un bien uno debería definir cuidadosamente cuatro aspectos:

1. Tipo de bien: es una descripción física del bien. (Obviamente, no es lo mismo una sombrilla que una papa.)

2. Lugar: ¿dónde está disponible el bien? (No da igual tener la sombrilla al lado de uno que en otra ciudad.)

3. Tiempo: ¿cuándo está disponible el bien? (No es igual tener la sombrilla disponible ahora que haberla tenido ayer o saber que se va a tener mañana.)

4. Estado de la naturaleza: ¿cuáles son las condiciones del mundo en las cuales disponemos del bien? (No da igual tener la sombrilla cuando está lloviendo que cuando no lo está.)

La incorporación del lugar en el cual el bien está disponible no es un ejercicio difícil (uno podría incorporarlo como parte de la definición del tipo de bien). Nos preocupamos ahora por la introducción a nuestro problema de las otras dos dimensiones, lo cual haremos de manera bastante simplificada. Supondremos que en la economía hay dos consumidores, $i = 1, 2$, y dos (tipos físicos de) bienes, $l = 1, 2$. Supondremos, sin embargo, que existen dos periodos de tiempo, el presente y el futuro, y que en el periodo futuro hay dos estados posibles de la naturaleza.

Específicamente, supondremos que los agentes se encuentran en el periodo presente, preocupados acerca de su bienestar en el periodo futuro. Con esta simple modificación al modelo de equilibrio general, ya estamos haciendo nuestro problema dinámico. Por supuesto, uno puede modelar problemas dinámicos en los que el futuro es perfectamente previsible. Una alternativa más interesante, sin embargo, es permitir que en periodos futuros puedan existir diferentes estados de la naturaleza en los cuales la riqueza y/o los gustos de los agentes cambien.

Aquí supondremos que en el período futuro de la economía pueden existir dos diferentes estados de la naturaleza, $s = 1, 2$. El estado incial lo denotamos por $s = 0$. La riqueza de los consumidores dependerá del estado de la naturaleza en el cual la economía se encuentre. Esto quiere decir que si el estado de la naturaleza es s, el agente i recibirá una dotación $\left(w^i_{1,s}, w^i_{2,s}\right)$ de bienes. Suponemos como antes que $\left(w^i_{1,s}, w^i_{2,s}\right) \in \mathbb{R}^2_+$ y denotamos $w^i_s = \left(w^i_{1,s}, w^i_{2,s}\right)$ y $w^i = \left(w^i_0, w^i_1, w^i_2\right) \in \mathbb{R}^6_+$.

Asímismo, si denotamos por $x^i_{l,s}$ el consumo que el agente i hace del bien l en el estado de la naturaleza s, entonces es claro que, en el periodo actual, cuando el agente i está pensando en su bienestar del periodo futuro, éste depende de su consumo de ambos bienes en todos los estados de la naturaleza:

$$\left(x^i_{1,0}, x^i_{2,0}, x^i_{1,1}, x^i_{2,1}, x^i_{1,2}, x^i_{2,2}\right)$$

Resulta entonces que las preferencias de los agentes (desde el punto de vista del presente) están representadas por una función de utilidad

$$u^i : \mathbb{R}^6_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Con estos elementos, nuestra economía queda totalmente descrita. En otras palabras, cuando hablemos en esta sección de una economía nos estamos refiriendo a un par de funciones de utilidad u^1 y u^2 y dotaciones w^i_0, w^i_1 y w^i_2.

13.0.1. Tipos de mercados y el concepto de equilibrio

En esta seccion vamos a introduccir diferentes estructuras de mercado que, en principio, son bastante naturales.

Debreu consideró la siguiente estructura de mercado. Suponga que en el periodo presente se abren mercados en los que los agentes pueden comprar y vender derechos a consumir en el periodo futuro (i.e., mercados contingentes) así como mercados para cada uno de los bienes de consumo. Más específicamente, en el caso de los mercados contingentes, para cada bien l y cada estado de la naturaleza s existe un mercado en el que se da un precio $p_{l,s}$ y en el que los agentes pueden ir a comprar derechos a cantidades de ese bien en ese estado de la naturaleza. Así, si el agente 1 compró derechos a consumir 5 unidades del bien 2 en el estado de la naturaleza 1, entonces él tiene la certeza de que si en el futuro el estado que ocurre es 1, él va a poder consumir 5 unidades del bien 2: $x^1_{2,1} = 5$. En el caso del mercado de bienes de consumo, este opera exactamente de la misma forma que en las secciones anteriores.

El supuesto de Debreu es que cada agente i acude a estos mercados y transa derechos de consumo futuro a los precios vigentes, sujeto únicamente a que el valor de los derechos comprados no supere el valor de los derechos que él posee como riqueza: la asignación w^i. Puesto de otra forma, el agente i sabe que, por dotación, el nace con derecho a consumir $w^i_{l,s}$ unidades del bien l cuando el estado de la naturaleza es s; lo que él hace es vender y comprar derechos de consumo, sujeto a que el valor de los derechos con los que él termine no supere el valor de los derechos que él tiene como asignación. Por supuesto, las decisiones del agente en estos mercados van a determinar los consumos que él tenga en el futuro y, por tanto, el agente las tomará de una manera óptima según sus preferencias. Esto quiere decir que, dados unos precios $P = (P_{1,0}, P_{2,0}, P_{1,1}, P_{2,1}, P_{1,2}, P_{2,2})$ el agente i decidirá cuánto comprar o vender en estos mercados de forma tal que él resuelva el siguiente problema:

$$\text{máx}\, u^i (x_0, x_1, x_2)$$

$$\text{s.a.} \quad P_0 \cdot x_0 + P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 \leqslant P_0 \cdot w_0 + P_1 \cdot w_1 + P_2 \cdot w_2$$

Bajo esta estructura de mercados, es fácil definir el equilibrio general:

Definición 20 *Dada una economía, un equilibrio general de mercados contingentes es un par compuesto por unos precios $p = (p_0, p_1, p_2)$ y unas demandas individuales $x^1 = \left(x_0^1, x_1^1, x_2^1\right)$ y $x^2 = \left(x_0^2, x_1^2, x_2^2\right)$ tales que:*

1. *Para cada agente, su demanda maximiza su bienestar sujeto a su restricción presupuestal: para cada agente i,*

$$\begin{array}{rcl} u^i \left(x_0^i, x_1^i, x_2^i\right) & = & \text{máx}\, u^i (x_0, x_1, x_2) \\ p_0 \cdot x_0 + p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 & \leqslant & p_0 \cdot w_0 + p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 \end{array}$$

2. *Los mercados contingentes están en equilibrio: para cada bien l y cada estado de la naturaleza s:*

$$x_{l,s}^1 + x_{l,s}^2 = w_{l,s}^1 + w_{l,s}^2$$

Es claro que la definición anterior es un análogo perfecto de la definición de las secciones anteriores. Se concluye, por tanto, que todas las propiedades positivas y normativas que estudiamos anteriormente se pueden transladar a este concepto de equilibrio.

La estructura de mercados de Debreu puede resultar inapropiada en muchos casos de la vida real: si bien en algunos países en tiempos recientes se han venido desarrollando mercados que se parecen a los que consideró Debreu, también es cierto que en la mayoría de los países ese tipo de mercados aun está lejos de desarrollarse y, aun en aquellos en los que más se ha desarrollado, lo que hoy existe dista de ser completo en el sentido de existan derechos de consumo para todos los bienes y para todos los estados de la naturaleza. Lo que sí existe en la mayoría de las economías es un mercado de activos, los cuales uno adquiere en el presente y constituyen promesas de algún retorno monetario futuro que depende del estado de la naturaleza que ocurra.

La estructura de mercados que Arrow consideró es una idealización de los mercados de activos.[14] El supuso que lo único que se transaba en el periodo

[14] Específicamente los activos que vamos a considerar son activos nominales.

presente de la economía son activos y que existía, para cada estado de la naturaleza s, un activo cuyo retorno futuro es \$1 si ese estado s de la naturaleza ocurre y \$0 si el estado no ocurre. En nuestro caso, lo que estamos suponiendo es que en el periodo presente los agentes sólo se dedican a comprar y vender activos financieros y que sólo existen dos activos financieros: el activo 1 es una promesa de pagar una unidad monetaria en el periodo futuro si el estado de la naturaleza es 1 y de no pagar nada si el estado es 2; el activo 2 es la promesa contraria, es decir la que paga \$1 si el estado es 2 y \$0 si el estado es 1. Luego, en el periodo futuro, el ingreso que cada agente será determinado, según el estado de la naturaleza, por el valor de la dotación que el agente recibe en ese estado de la naturaleza y el rendimiento, también en ese estado de la naturaleza, de los activos que el agente compró en el periodo presente.

Así, supongamos que q_1y q_2 son, respectivamente, los precios de los activos 1 y 2. Supongamos que el agente i demanda z_1^i y z_2^i unidades de dichos activos. ¿Cuál es la restricción que el agente enfrenta al momento de transar activos? Como es natural en economía, lo que suponemos es que los agentes en ningún momento gastan más que el valor de la riqueza que tienen disponible. En este caso, el ingreso disponible en el periodo presente es la diferencia entre su ingreso menos el costo del consumo inicial, luego la restricción que el agente i enfrenta en el periodo presente es:

$$q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0$$

Ahora, supongamos que en el periodo futuro, en el estado s de la naturaleza, los precios (correctamente previstos) de los dos bienes son $p_{1,s}$ y $p_{2,s}$. Nuevamente, el valor del consumo del agente en el estado s a estos precios no puede superar el ingreso del cual el agente dispone. En este caso, si en el periodo presente el agente ha adquirido z_s^i unidades del activo s, la riqueza total del agente es

$$p_{1,s} w_{1,s}^i + p_{2,s} w_{2,s}^i + z_s^i$$

con lo cual la restricción presupuestal del agente en s es

$$p_{1,s} x_{1,s}^i + p_{2,s} x_{2,s}^i \leqslant p_{1,s} w_{1,s}^i + p_{2,s} w_{2,s}^i + z_s^i$$

Así, el problema que el agente resuelve en el periodo presente es

$$\begin{aligned} &\max_{x,z} u^i(x_0, x_1, x_2) \\ &\text{s.a.} \begin{cases} q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0 \\ p_{1,1} x_{1,1} + p_{2,1} x_{2,1} \leqslant p_{1,1} w_{1,1}^i + p_{2,1} w_{2,1}^i + z_1^i \\ p_{1,2} x_{1,2} + p_{2,2} x_{2,2} \leqslant p_{1,2} w_{1,2}^i + p_{2,2} w_{2,2}^i + z_2^i \end{cases} \end{aligned}$$

(debe notarse que, aunque mantenemos el supuesto de que los agentes no pueden consumir cantidades negativas de bienes, sí es posible que las variables z tomen valores negativos: los agentes pueden vender activos, lo cual quiere decir que ellos se comprometen a transferir dinero si el respectivo estado de la naturaleza ocurre.)

Con esto en mente, es fácil definir el equilibrio general: los agentes deben resolver óptimamente sus problemas y los mercados, tanto de bienes como de activos, deben ajustarse. En el mercado de bienes, la oferta esta dada por las dotaciones de bienes. En el mercado de activos la oferta agregada es cero. Así,

Definición 21 *Dada una economía, un equilibrio general en activos de Arrow es un vector de precios de activos, $q = (q_1, q_2)$, vectores de precios de los bienes en cada estado de la naturaleza, $p = (p_0, p_1, p_2)$, demandas de bienes para cada uno de los agentes, $x^1 = \left(x_0^1, x_1^1, x_2^1\right)$ y $x^2 = \left(x_0^2, x_1^2, x_2^2\right)$, y demandas de activos para cada uno de los agentes, $z^1 = \left(z_1^1, z_2^1\right)$ y $z^2 = \left(z_1^2, z_2^2\right)$ tales que:*

1. *Cada agente maximiza su utlilidad bajo la restricción presupuestal implicada por los precios: para cada i,*

$$u^i\left(x_0^i, x_1^i, x_2^i\right) = \max_{x,z} u^i\left(x_0, x_1, x_2\right)$$
$$s.a. \left\{ \begin{array}{c} q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0 \\ p_{1,1} x_{1,1} + p_{2,1} x_{2,1} \leqslant p_{1,1} w_{1,1}^i + p_{2,1} w_{2,1}^i + z_1^i \\ p_{1,2} x_{1,2} + p_{2,2} x_{2,2} \leqslant p_{1,2} w_{1,2}^i + p_{2,2} w_{2,2}^i + z_2^i \end{array} \right.$$

2. *Los mercados de bienes se equilibran: para cada l y cada s,*

$$x_{l,s}^1 + x_{l,s}^2 = w_{l,s}^1 + w_{l,s}^2$$

3. *Los mercados de activos se equilibran:*

$$\begin{array}{rcl} z_1^1 + z_1^2 & = & 0 \\ z_2^1 + z_2^2 & = & 0 \end{array}$$

Puede que esto no sea obvio, pero la definición de equilibrio que acabamos de dar es, bajo ciertas condiciones, equivalente a la de equilibrio con mercados contingentes. Esto es dada una economía, unos precios y una asignación son un equilibrio en mercados contingentes si y sólo si ellos tambien hacen parte de un equilibrio con activos de Arrow de la misma economía. La razón por la que esto es así está plenamente estudiada: en una economía de mercados contingentes, los agentes enfrentan una sola restricción presupuestal, lo cual quiere decir que ellos pueden tranferir riqueza libremente entre estados de la naturaleza; con activos de Arrow, los agentes enfrentan varias restricciones, ¡pero la estructura de activos es tal que ellos aún pueden transferir riqueza libremente!

Esta equivalencia implica que todas las propiedades, positivas y normativas, del concepto de equilibrio en mercados contingentes son compartidas con los mercados en con activos de Arrow.

Formalmente sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y supongamos que existe $\pi \in R_{++}^2$ tal que $\pi R = q$. Por ejemplo, esto sucede cuando $q >> 0$. Entonces es fácil ver que si

(x,p,q) es un equilibrio con mercados financieros de Arrow, entonces (x,P) es un equilibrio con mercados contingentes donde $P=(p_0,\pi_1 p_1,\pi_1 p_1)$ y viceversa.

Las condiciones bajos las cuales existe $\pi \in R^2_{++}$ tal que $\pi R = q$ son equivalentes a lo que se conoce como condiciones de no arbitraje que básicamente caracterizan las situaciones bajos las cuales el problema del consumidor con activos de Arrow, tiene una demanda bien definida de bienes y activos.

Si bien la estructura de mercados introducida por Arrow parece más realista que la de Debreu, aún no resulta una descripción plenamente real de los mercados. Radner hizo este punto y generalizó el análisis de Arrow. Lo que Radner observó es que en la vida real uno no tiene, en general, la oportunidad de transar en activos de Arrow. En cambio, lo que uno puede transar en el presente son activos financieros, cuyo retorno en el periodo futuro dependerá del estado de la naturaleza que ocurra, pero que no necesariamente será \$1 en un cierto estado y \$0 en el otro.

En nuestro caso, supondremos que hay 2 activos, $a=1,2$. El retorno de cada activo es la cantidad de dinero que el poseedor del activo recibirá, por unidad de él, en el periodo futuro, lo cual dependerá del estado de la naturaleza. Así, si el estado de la naturaleza es s, denotaremos por $r_s^a \in \mathbb{R}$ el retorno que el activo a pagará por unidad. Ahora, denotaremos por z_a^i la cantidad de activo i demandada por el agente a.

Como antes, si los precios de los activos son q_1 y q_2, la restricción que el agente i enfrentará en el periodo presente es

$$q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0$$

Nota técnica 12 *Nótese que esta restricción luce igual que que bajo activos de Arrow. No se debe olvidar, sin embargo, que ya no es cierto que los nombres de los activos correspondan a estados de la naturaleza.*

Nuevamente, los precios futuros (correctamente previstos) de los dos bienes son $p_{1,s}$ y $p_{2,s}$ en el estado s de la naturaleza y el valor del consumo del agente en el estado s a estos precios no puede superar el ingreso del cual el agente dispone. En este caso, si en el periodo presente el agente ha adquirido z_a^i unidades del activo a, el retorno total que él recibe por concepto de este activo es $r_s^a z_a^i$, con lo cual su riqueza total es

$$p_{1,s} w_{1,s}^i + p_{2,s} w_{2,s}^i + r_s^1 z_1^i + r_s^2 z_2^i$$

y su restricción presupuestal en s es

$$p_{1,s} x_{1,s}^i + p_{2,s} x_{2,s}^i \leqslant p_{1,s} w_{1,s}^i + p_{2,s} w_{2,s}^i + r_s^1 z_1^i + r_s^2 z_2^i$$

Así, el problema que el agente resuelve en el periodo presente es

$$\begin{aligned}
&\max_{x,z} u^i\left(x_0, x_1, x_2\right) \\
&\text{s.a.} \begin{cases} q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0 \\ p_{1,1} x_{1,1} + p_{2,1} x_{2,1} \leqslant p_{1,1} w_{1,1}^i + p_{2,1} w_{2,1}^i + r_1^1 z_1^i + r_1^2 z_2^i \\ p_{1,2} x_{1,2} + p_{2,2} x_{2,2} \leqslant p_{1,2} w_{1,2}^i + p_{2,2} w_{2,2}^i + r_2^1 z_1^i + r_2^2 z_2^i \end{cases}
\end{aligned}$$

Con esto, el concepto de equilibrio que surge es:

Definición 22 *Dada una economía, supongamos que los retornos de los activos son r_1^1, r_2^1, r_1^2 y r_2^2. Un equilibrio general en activos financieros es un vector de precios de activos, $q = (q_1, q_2)$, vectores de precios de los bienes en cada estado de la naturaleza, $p_1 = (p_{1,1}, p_{2,1})$ y $p_2 = (p_{1,2}, p_{2,2})$, demandas de bienes para cada uno de los agentes, $x^1 = \left(x_{1,1}^1, x_{2,1}^1, x_{1,2}^1, x_{2,2}^1\right)$ y $x^2 = \left(x_{1,1}^2, x_{2,1}^2, x_{1,2}^2, x_{2,2}^2\right)$, y demandas de activos para cada uno de los agentes, $z^1 = \left(z_1^1, z_2^1\right)$ y $z^2 = \left(z_1^2, z_2^2\right)$ tales que:*

1. *Cada agente maximiza su utlilidad bajo la restricción presupuestal implicada por los precios: para cada i,*

$$
\begin{aligned}
u^i\left(x_0^i, x_1^i, x_2^i\right) &= \max_{x,z} u^i\left(x_0, x_1, x_2\right) \\
& \quad s.a. \left\{ \begin{array}{r} q_1 z_1 + q_2 z_2 \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0 \\ p_{1,1}x_{1,1} + p_{2,1}x_{2,1} \leqslant p_{1,1}w_{1,1}^i + p_{2,1}w_{2,1}^i + r_1^1 z_1^i + r_1^2 z_2^i \\ p_{1,2}x_{1,2} + p_{2,2}x_{2,2} \leqslant p_{1,2}w_{1,2}^i + p_{2,2}w_{2,2}^i + r_2^1 z_1^i + r_2^2 z_2^i \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

2. *Los mercados de bienes se equilibran: para cada l y cada s,*

$$x_{l,s}^1 + x_{l,s}^2 = w_{l,s}^1 + w_{l,s}^2$$

3. *Los mercados de activos financieros se equilibran:*

$$
\begin{aligned}
z_1^1 + z_1^2 &= 0 \\
z_2^1 + z_2^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Debe ser claro que esta definición generaliza la de Arrow, pero que, las definiciones no son equivalentes. El punto es que en Arrow (como en Debreu) cualquier transferencia de riqueza entre estados futuros de la naturaleza es posible, gracias a los mercados que existen en el presente. De nuestro conocimiento de algebra lineal debe ser claro que pueden existir retornos de los activos (r_1^1, r_2^1, r_1^2 y r_2^2) tales que no toda transferencia de riqueza entre estados de la naturaleza es posible. Este es el caso cuando los retornos de un activos no son más que un multiplo de los retornos del otro activo.

Cuando los retornos de los activos son tales que cualquier transferencia de riqueza es posible por medio de un portafolio de activos, se dice que la economía tiene mercados completos. En este caso, la definición anterior es equivalente a la de Arrow (y por tanto a la de Debreu), razón por la cual es obvio que todas las propiedades, positivas y normativas, del modelo de las secciones anteriores las cumple este nuevo concepto de equilibrio.

Las cosas son mucho más complicadas cuando la estructura de activos es tal que no todas las transferencias de riqueza pueden realizarse. En este caso se dice que la economía tiene mercados incompletos y esta nueva definición de equilibrio no es equivalente a las anteriores. Es más, las propiedades, positivas y normativas, más importantes de las conceptos de equilibrio anteriores no están garantizadas para nuestro nuevo concepto cuando los mercados son incompletos. En efecto, es posible construir economías para las que no existe equilibrio aunque se ha demostrado que éstas economías son una gran minoría (es decir, en casi todas las economías el equilbrio existe). Aún más importante es el hecho de que con mercados incompletos no tenemos garantía de que la conclusión del primer teorema de economía del bienestar se cumpla y, de hecho, se ha demostrado que cuando los mercados son incompletos, en casi todas las economías los equilibrios de mercados de activos no son eficientes en el sentido de Pareto.

Este último resultado aparece como un primer llamado a que la autoridad de política económica tome acciones de intervención en el resultado arrojado por los mercados. Situaciones de este tipo suelen conocerse como *fallas de mercado.* En efecto, la incompletitud de los mercados es un primer ejemplo de una falla de mercado; otros ejemplos de fallas del mercado son las economías con externalidades, economías con bienes públicos, asimetrías de información, etc. Todas estas las estudiaremos más adelante.

13.0.2. No arbitrage y valoración de activos

El modelo con activos financieros de la sección anterior nos permite explorar varios aspectos importantes que los agentes económicos enfrentan debido a la dimensión temporal de la decisiones económicas o a la incertidumbre con la que estos se enfrentan. Primero consideremos el caso de valorar una activo financiero replicable mediante los instrumentos existentes en el mercado. Más precisamente, supongamos que estamos en el mundo de la sección anterior. Decimos que un activo financiero $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$ es replicable mediante la estructura de activos existentes (r_1^1, r_2^1, r_1^2 y r_2^2), si existe un portafolio (z_1, z_2) tal que:

$$\begin{bmatrix} \overline{r}_1 \\ \overline{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^1 & r_1^2 \\ r_2^1 & r_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, si existe un equilibrio con los activos financieros (r_1^1, r_2^1, r_1^2 y r_2^2), existe un equilibrio en la economía que se obtiene de aumentar un nuevo activo $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$. Más aún, las asignaciones y precios de equilibrio de los bienes son las mismas y si q_1, q_2 y $\overline{q}$ son los precios de equilibrio de los activos, entonces:

$$\overline{q} = q_1 z_1 + q_2 z_2$$

La anterior relación entre el precio del activo $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$ y el de los dos activos que lo replican ilustra un principio basico de finanzas. En equilibrio, el precio de un activo debe ser igual al precio del portafolio de activos que lo replica de lo contrario, exitiría una *oportunidad de arbitrage.* Una oportunidad de arbitrage es una situación en la cual a los precios vigentes de los activos sería posible obtener un beneficio con probabilidad positiva, sin asumir ningún riesgo y sin incurrir en ningún costo. Supongamos por ejemplo que $\overline{q} > q_1 z_1 + q_2 z_2$. Enotonces, un agente podría vender a descubierta una unidad del activo $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$ y utilizar este dinero para comprar z_1 y z_2 unidades de los activos 1 y 2 En esta operación el obtendría un beneficio estrictamentte positivo. Ahora, en el siguiente periodo, puesto que el portafolio de activos que el compro replica perfectamente aquel que vendio a descubierta el periodo pasado entonces el puede cumplir sin ningun riesgo con las obligaciones que adquirio al vender en el primer periodo el activo $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$. En conclusión, a estos precios, un agente podría aumentar su ingreso de forma ilimitada en el primer periodo. Por lo tanto, el problema del agente no tendría solución. Un argumento similar muestra que $\overline{q} < q_1 z_1 + q_2 z_2$ no es posible.

Ejercicio 40 *Considere la misma economía de la sección anterior.*

1. *Defina un bono libre de riesgo. Establecer las condiciones bajo las cuales el bono es replicacable utilizando los otros dos activos. Calcular el precio al cual se compra el bono en función del precio de los otros dos activos.*

2. *Defina un contrato futuro sobre el bien de la economía. Establecer las condiciones bajo las cuales el futuro es replicacable utilizando los otros dos activos. Calcular el precio de ejercicio del futuro en función del precio de los otros dos activos de tal forma que no existan oportunidades de arbitrage. Obsérvese que este precio de ejercicio no depende la distribución de probabilidad con la que se realizan los estados futuros de la naturaleza. Calcular el precio de ejercicio en función del precio del bono del numeral anterior.*

3. *Defina una opción de compra Europea sobre el bien de la economía. Establcer las condiciones bajo las cuales la opción es replicacable utilizando los otros dos activos. Calcular el valor de opción en función del precio de los otros dos activos. Escribir el valor de la opción como un valor esperado descontado por la tasa de descuento implícita del bono del primer numeral.*

13.0.3. Precios intertemporales e ineficiencia del equilibrio

- Supongamos el caso más sencillo posible de una economía de Radner.
- Existe un único bien de consumo en cada estado.
- Existe un único activo financiero, un bono libre de riesgo cuyo precio en $t = 0$ lo denotamos por:
$$q = \frac{1}{1+r}$$
y que promete pagar una unidad independientemente del estado de la naturaleza que en el siguiente periodo se realize. Obsérvese que r es la rentabilidad del activo.
- Supongamos que cada agente i tiene una probabilidad "subjetiva"sobre la realización de los estados en el periodo siguiente. Denotamos la probabilidad subjetiva del agente i por el estado $s = 1$ como $\pi^i \in (0, 1)$ luego la probabilidad del segundo estado es $1 - \pi^i$. Adicionalmente, supongamos

que la preferencias de los agentes se pueden expresar (representación de von-Neumann y Morgenstern) de la siguiente forma:

$$U^i\left(c_0,c_1,c_2\right)=u^i(c_0)+\beta(\pi u^i\left(c_1\right)+(1-\pi)u^i\left(c_2\right)),$$

donde $\beta\in(0,1)$ y u^i es una función que llamamos la utilidad instantánea. Nótese la siguiente interpretación de la representación anterior de la función de utilidad de los agentes. El término en paréntesis es la utilidad esperada del consumo en el periodo $t=1$. Al multiplicar por β (un número menor que uno) nos da el valor presente del valor esperado de la utilidad del consumo en $t=1$. Es decir, el factor β descuenta la utilidad futura a valor presente y refleja el hecho de que los agentes valoran más el presente que el futuro. Luego, otra forma de escribir a función de utilidad anterior es:

$$U^i\left(c_0,c_1,c_2\right)=u^i(c_0)+\beta E^i\left[u^i\left(c\right)\right]$$

donde E^i denota el valor esperado del consumo en $t=1$ con base en la probabilidad subjetiva de cada agente.

- El problema del consumidor es (obsérvese que hemos normalizado el precio del bien a uno):

$$\begin{aligned} & \max U^i\left(c_0,c_1,c_2\right) \\ c_0+\frac{1}{1+r}z &= w_0 \\ c_s &= w_s+z,\ s=1,2. \end{aligned}$$

Las condiciones de prmer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i(c_0)}{\partial c} &= \lambda_0^i \\ \beta\pi^i\frac{\partial u^i(c_1)}{\partial c} &= \lambda_1^i \\ \beta\left(1-\pi^i\right)\frac{\partial u^i(c_2)}{\partial c} &= \lambda_2^i \\ \lambda_0^i\frac{1}{1+r} &= \lambda_1^i+\lambda_2^i \end{aligned}$$

- Dos implicaciones nos interesan de las anteriores ecuaciones.

  1. (Ecuación de Euler)

  $$\frac{\partial u^i(c_0)}{\partial c}=E^i\left[\beta\frac{\partial u^i(c)}{\partial c}(1+r)\right]$$

  La anterior ecuación pone de manifiesto el papel de la variable r. Ésta es, intuitivamente, la tasa de interés real de la economía. Obsérvese que con esta interpretación la ecuación de Euler refleja la condición de optimalidad estándar de un problema de optimización con reestricciones: en el óptimo los agentes igualan el beneficio marginal al costo marginal. En este caso intertemporal y bajo incertidumbre, la ecución de Euler dice que, el costo marginal de dejar de consumir una unidad de consumo hoy $\frac{\partial u^i(c_0)}{\partial c}$, en el óptimo, debe ser igual al valor presente del valor esperado del beneficio marginal que esa unidad nos puede brindar mañana, $E^i\left[\beta\frac{\partial u^i(c)}{\partial c}(1+r)\right]$. La forma de pensar esto es la siguiente. Hoy dejamos de consumir una unidad de consumo. El costo de esta decisión es $\frac{\partial u^i(c_0)}{\partial c}$. Esta unidad la invertimos en el bono libre de riesgo para obtener una retabilidad bruta $(1+r)$ el día de mañana independientemente del estado de la naturaleza realizado. Ahora, $(1+r)$ unidades del bien de consumo mañana representa una utilidad marginal de $\frac{\partial u^i(c_s)}{\partial c}(1+r)$ mañana en cada estado de la naturaleza $s=1,2$. Luego el valor esperado de la utilidad mañana es $E^i\left[\frac{\partial u^i(c)}{\partial c}(1+r)\right]$ y como la forma de descontar los utiles mañana es con el factor de descuento β, entonces el valor presente del valor eperado de la utilidad marginal mañana es $E^i\left[\beta\frac{\partial u^i(c)}{\partial c}(1+r)\right]$. Por lo tanto, la escogencia óptima de consumo para el agente lo que hace es igualar el costo marginal al beneficio marginal.

2. (No optimalidad del equilibrio). En un equilibrio competitivo, los agentes deben estar maximizando sus utilidades. El siguiente es un argumento informal que sugiere que, en presencia de mercados financieros incompletos, las tasas marginales de sustiución entre agentes no se igualan y por lo tanto, un equilibrio con mercados incompletos no es un óptimo de Pareto. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos agentes y calculemos las tasas marginales de sustitución para cada agente entre consumo hoy y consumo en $s=1$.

$$TMS^1_{0,1}=\frac{\frac{\partial U^1(c_0,c_1,c_2)}{\partial c_0}}{\frac{\partial U^1(c_0,c_1,c_2)}{\partial c_1}}=\frac{\lambda^1_0}{\lambda^1_1}(1+r)$$

y

$$TMS^2_{0,1}=\frac{\frac{\partial U^2(c_0,c_1,c_2)}{\partial c_0}}{\frac{\partial U^2(c_0,c_1,c_2)}{\partial c_1}}=\frac{\lambda^2_0}{\lambda^2_1}(1+r)$$

Las tasas marginales de sustitución son iguales si $\frac{\lambda^1_0}{\lambda^1_1}=\frac{\lambda^2_0}{\lambda^2_1}$. Sin embargo, se puede demostrar que esta última igualdad no siempre se cumple.

Ejercicio 41 *Considere una economía idéntica a la descrita en esta sección pero suponiendo que no existe incetidumbre en $t=1$. Esto es, una economía dinámica pero de previsión perfecta.*

1. *Escribir el problema de optimización de cada agente.*

2. *Deducir la ecuación de Euler y dar una interpretación de ésta.*

3. *Mostrar que en este caso las tasas marginaes de sustitución sí se igualan, por lo tanto, se cumple el primer teorema del bienestar.*

4. *¿Es esta economía una economía con mercados financieros completos?*

14. Desviaciones de la teoría del equilibrio general

- En las próximas secciones vamos a explorar algunas desviaciones de las hipótesis de la teoría del equilibrio general que tienen como consecuencia la violación del primer teorema de la economía del bienestar.
- Vamos a estudiar situaciones en donde el resultado económico de la interacción de los agentes resulta en asignaciones o niveles de producción ineficientes.
- Este tipo de situaciones se llaman genéricamente *fallas de mercado.*
- Los ejemplos más importantes existentes y que estudiaremos en esta notas son situaciones en la que existe competencia imperfecta, los mercados incompletos, existen *externalidades* (en la producción de bienes o el bienestar de los agentes), existen *bienes públicos* o *información asimétrica* (en particular, cuando existe riesgo moral o selección adversa). En su debido momento definiremos cada uno de estos términos.

14.1. Competencia imperfecta

Vamos a estudiar el caso en el cual las firmas no enfrentan un mercado competitivo del bien final. Este caso puede ser consecuencia de la existencia de apenas un número finito y pequeño de empresas que por razones regulatorias, altos costos de entrada, etc. no enfrentan competencia debida a nuevos entrantes. El caso extremo de esta situación es un mercado en el cual apensa existe una firma. Llamaremos éste un monopolista. El caso intermedio con un número finito, pero pequeño de firmas J, lo llamameros un oligopolio. Comenzamos estudiando las características básicas del primero.

14.1.1. Monopolio

Supongamos que hay una única firma que vende una cantidad de producto q a un precio p. Puesto que ésta es la única firma en el mercado, ésta escoge el precio como una función de la cantidad q, $p(q)$. El problema de la firma es:

$$\max_q p(q)q - c(q)$$

donde $c(q)$ es la función de costos condicionales y, por simplicidad, hemos omitido el precio de los factores. Es fácil demostrar que las condiciones de primer orden son:

$$p(q)\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon(q)|}\right) = c'(q)$$

donde el lado izquierdo es el ingreso marginal, el derecho el costo marginal y $\varepsilon(q) = (dq/dp)\,(p/q)$ es la elasticidad de la demanda con respecto al precio.[15]

[15]Suponemos que la demanda es decreciente en el precio.

Puesto que el costo marginal es siempre positivo entonces el problema tiene solución sólo cuando en el óptimo $|\varepsilon(q)| \geq 1$. En conclusión, una firma monopolista produce en la región donde la demanda es elastica.

Un poco de álgebra nos permite escribir la condición de primer orden como:

$$\frac{p(q) - c'(q)}{p(q)} = \frac{1}{|\varepsilon(q)|}$$

lo cual implica que el precio está por encima del costo marginal en una cantidad proporcional al inverso de la elasticidad de la demanda. Ahora, entre más inelastica sea la demanda (pero mayor que 1) mayor es la diferencia entre el precio y el costo marginal. Obsérvese que competencia perfecta corresponde al caso en el que la variación del *precio con la respecto a la cantidad es cero,* esto implica que la elasticidad de la demanda es infinita luego el precio es igual al costo marginal.

El anterior resultado, al igual que el caso de competencia perfecta, son casos extremos en los cuales la(s) firma(s) no llevan en considerción las acciones de otra firmas. En el caso del monopolista por definición, y en el caso de competencia perfecta, por hipótesis. Esto es, se supone que las firmas actuan en función de su propio beneficio tomando lo precios como dados y sin supener que sus acciones o cualquiera de las otras pueden afectar el entorno económico en el cual toman sus decisiones. Cuano hay apenas un grupo pequeño de firmas éste puede no ser el caso y las firmas pueden actuar de forma estratégica. Este es el contenido de la próxima sección.

14.1.2. Competencia oligopolística

Existen dos versiones interesantes de un mercado con estas características. En el primero denominado competencia a la Cournot[16] las firmas compiten en cantidades. En el segundo denominado competencia a la Bertrand, las firmas compiten en precios.[17]

Competencia a la Cournot

Supongamos que J firmas identicas compiten en un mercado por un bien homogéneo. Vamos a suponer que sus costos marginales son constantes:

$$c(q^j) = cq^j$$

donde $c \geq 0$ y q^j es el nivel de producción de la firma j. Supongamos que la demanda agregada inversa es lineal y la podemos escribir como:

$$p = a - b\sum_{j=1}^{J} q^j$$

[16] Cournot (1838)

[17] Bertrand (1883).

donde a y b son positivos. Por lo tanto los beneficios de una firma j son:

$$\Pi^j(q^1,...q^J) = \left(a - b\sum_{j=1}^{J} q^j\right) q^j - cq^j.$$

Es fácil demostrar que el equilibrio de Nash (Cournot - Nash) de este juego es:

$$q = \frac{a-c}{b(J+1)}.$$

Esto implica que los valores de equilibrio de la demanda (oferta) agregada, precio y beneficios son respectivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{J} q^j &= \frac{J\,(a-c)}{b(J+1)} \\ p &= a - J\frac{a-c}{(J+1)} < a \\ \Pi^j &= \frac{(a-c)^2}{b(J+1)^2} \end{aligned}$$

Obsérvese que cuando $J = 1$ tenemos el caso de una firma monopolísta. Cuando $J \to \infty$ obtenemos competencia perfecta. Luego, competencia perfecta puede verse como un límite de competencia imperfecta a la Cournot cuando el número de firmas es grande.

Competencia a la Bertrand

Resulta más natural suponer que las firmas compiten en precios mas que en cantidades. Para simplificar, suponganos que hay solo dos firmas idénticas que producen un único bien homogéneo y que la demanda agregada es lineal y de la forma:

$$Q = \alpha - \beta p.$$

Cada firma anuncia su precio y se dispone a ofrecer la cantidad demandada. Si una firma ofrece a un precio menor que la otra, ésta se gana todo el mercado. Si ofrecen el mismo precio lo comparten en cantidades iguales. Los beneficios de la firma 1 son (y análogamente para la firma 2):

$$\Pi^1(p^1,p^2) = \begin{array}{cc} (p^1-c)(\alpha-\beta p^1) & \text{si } c < p^1 < p^2 \\ \frac{1}{2}(p^1-c)(\alpha-\beta p^1) & c < p^1 = p^2 \\ 0 & \text{otros casos} \end{array}$$

Es fácil demostrar que el único equilibrio de Nash de este juego es aquel en que ambas firmas venden su producto al costo marginal. Es interesante que apenas con dos firmas y, en contraste con el caso de competencia a la Cournot, el equilibrio coincide con el equilibrio competitivo.

Los anteriores resultados no son robustos a desviaciones con respecto a ciertas características del bien producido o el tipo de firmas. En particular, productos homogéneos y firmas identicas. Sin embargo nuestro mayor interés es mostrar que en algunas circunstancias, desviaciones del paradigma de competencia perfecta tiene como consecuencia equilibrios ineficientes. Este es el contenido de la próxima sección.

14.1.3. Ineficiencia del equilibrio

- Obsérvese que todos los equilibrios mencionados están sobre la curva de demanda agregada. La pregunta que nos hacemos es cuál de estos equilibrios es un equilibrio eficiente.
- Por simplicidad supongamos que hay una firma y un consumidor. Vamos a demostrar que cuando el precio de equilibrio del bien final no es igual al costo marginal entonces las asignaciones finales son ineficientes desde un punto de vista económico.
- En la próxima seccción vamos a formalizar el concepto de eficiencia de una economía. Sin embargo, informalmente basta con la siguiente definición. Una asignación de la economía (producto, insumos, etc) es ineficiente, si existe otra asignación de recursos factible tal que el consumidor o la firma pueden alcanzar niveles de bienestar o beneficios mayores sin perjudicar al otro.
- Supongamos el costo marginal es creciente (esto es cierto cuando la función de producción es cóncava).
- Supongamos que la asignación de equilibrio (por ejemplo, en competencia imperfecta - competencia monopolítica o Cournot) corresponde al precio p_0 que es distinto al costo marginal.
- Entonces la variación en los beneficios de la firma de reducir los precios a p_1 es:

$$\begin{aligned}
& (p_1 q_1 - c(q_1)) - (p_0 q_0 - c(q_0)) \\
= \quad & \\
& p_1 q_1 - p_0 q_0 - (c(q_1) - c(q_0)) \\
= \quad & \\
& p_1 q_1 - p_0 q_0 - \int_{q_0}^{q_1} mc(q)dq \\
= \quad & (C + D - A) - D \\
= \quad & C - A
\end{aligned}$$

- Ahora, obsérvese que la ganancia en bienestar del consumidor es $A + B$ luego si bajamos los precios podemos recolectar del consumidor A, se lo transferimos a la firma y ambos mejoran: el consumidor B y la firma C.

- En conclusión, el equilibrio inicial no es eficiente. Se sigue que el equilibrio bajo competencia monopolistica o oligopolistica a la Cournot no es eficiente.

- Así como la la variación en el excedente del consumidor es una aproximación a la variación compensada y el cambio en bienestar del consumidor (en términos del numerario de la economía), en el caso de la firma, la medida del efecto sobre la función objetivo de la firma, es una medida del efecto de las variables exógenas. Específicamente en el caso de la firma los beneficios por encima de los costos variables es una medida del excedente del productor.

- Intutivamente uno pensaría que para ser eficiente la asignación de recursos, es necesario que se maximice el excedente total del consumidor y la firma. Esto no es completamente correcto en la medida que el excedente al consumidor, para bienes normales, excede el cálculo de la variación compensada que es en efecto la medida del cambio en bienestar del consumidor.

- Sin embargo, bajo el supuesto de un demanda decreciente y costos marginales crecientes se puede demosrar que esta es una condición necesaria (véase libro página 173 del libro).

14.2. Externalidades y bienes públicos

- Decimos que en una actividad económica existe una externalidad si la actividad de algún agente (consumidor o firma) afecta la actividad de los demás de una forma que no es mediada por el mercado. Por ejemplo, en el caso de una economía de intercambio, las acciones de cada consumidor ciertamente afectan, en equilibrio, las posibilidades de consumo de los demás agentes. Sin embargo, tales efectos se reflejan en los precios que juegan el papel de mediador entre los consumidores. Por lo tanto en este caso no existe ninguna externalidad. Ejemplos de lo contrario son el tema de esta sección.

Ejemplo 30 *Externalidades en la producción. Estas pueden ser de dos tipos, externalidades positivas y negativas. Formalmente, si* $Y = F(K, L; X)$ *es la tecnología para producir un bien utilizando como insumos* K *y* L *pero además la teconología la afecta una variable* X *para la cual no hay un mercado, decimos que* X *es una externalidad en el proceso de producción. Si* $\frac{\partial F(K,L;X)}{\partial X} > 0$*, decimos que la externalidad es positiva y si* $\frac{\partial F(K,L;X)}{\partial X} < 0$ *decimos que es negativa. Por ejemplo, una externalidad positiva se presenta cuando suponemos que* X *es el stock de conocimiento agregado de una economía. Esta es la idea fundamental de la teoría del crecimiento endógeno de Romer [1986]. Si* X *representa la contaminación de un río que efecta la producción de una firma, enotonces tenemos un ejemplo de una externalidad negativa.*

Ejemplo 31 *Externalidades en el bienestar de los consmidores. El prototipo de ejemplo es el caso de bienes públicos que más adelante estudiaremos con detalle.*

14.2.1. Externalidades en la producción

En las notas sobre teoría del equilibrio con producción introducimos el concepto de ineficiencia en la producción. Obsévese que una forma de caracterizar las asignaciones eficientes de insumos y niveles eficientes de producción es suponiendo que argegamos las funciones de producción y resolvemos el problema de maximización de las firmas consolidadas. Más formalmente, supongamos que tenemos dos firmas que producen dos bienes utilizando capital y trabajo. Ambas firmas rentan capital y trabajo en el mismo mercado (competitivo) luego enfrentan los mismos precios. Ahora, supongamos por un momento que ambas firmas son operadas por un mismo gerente que busca maximizar los beneficios totales de las dos firmas. Esto es, el resuelve el problema:

$$\text{máx}\, p_1 F^1(K_1, L_1) + p_2 F^2(K_2, L_2) - r\,(K_1 + K_2) - w\,(L_1 + L_2)$$

Las condiciones de primer orden de este problema implican que la tasa marginal de sustitución técnica entre los dos factores es igual, en el optimo, entre firmas. Esto es la caracterización que dimos anteriormente de la eficiencia en la producción.

Ahora, cuando existen externalidades no es difícil convencerse que un problema de optimización similar arroja demandas por factores y niveles de producción que también son eficientes. Veamos esto a través de un ejemplo que contiene el mensaje principal de esta sección.

Supongamos que tenemos dos firmas que operan en las orillas de un río. La firma 1 opera río arriba y la 2 más abajo. La firma 1 utiliza como insumo sólo el trabajo y la firma dos utiliza trabajo pero se ve afectada por la contaminación que la firma 1 le causa al río. Un ejemplo concreto que puede servir para fijar ideas es el siguiente. Las firmas están ambas en las orillas del río Bogotá. La primera es una curtiembre que utiliza mano de obra (por simplicidad, nos abstraemos de todos los demás costos de la firma) y en el proceso de producción contamina el río. La firma 2 cultiva truchas y para esto utiliza las aguas del río y mano de obra. Ambas firmas acuden al mismo mercado a contratar mano de obra. Por simplicidad suponemos que el nivel de contaminación del río es igual a la producción de la firma 1. Para resumir, las tecnologías son las siguientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= F^1(L_1) \\ y_2 &= \widetilde{F}^2\,(y_1, L_2) \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} > 0, \frac{\partial \widetilde{F}^2(y_1,L_2)}{\partial L_2} > 0$, los retornos marginales son decrecientes y $\frac{\partial \widetilde{F}^2(y_1,L_2)}{\partial y_1} < 0$. En lo que sigue será conveniente escribir las funciones de producción en términos únicamente del factor trabajo. Para esto, sustituimos la ecuación 1 en la función de producción 2 para obtener una función de la forma: $y_2 = F^2\,(L_1, L_2)$ donde $\frac{\partial F^2(L_1,L_2)}{\partial L_1} < 0$. En conclusión, las tecnología de producción las podemos resumir en:

$$\begin{aligned} y_1 &= F^1(L_1) \\ y_2 &= F^2\,(L_1, L_2) \end{aligned}$$

Como anotamos en la sección anterior, una forma de caracterizar las demandas y niveles de producción eficientes es resolviendo el siguiente problema de maximización:

$$\max p_1 F^1(L_1) + p_2 F^2(L_1, L_2) - w\,(L_1 + L_2)$$

Nota técnica 13 *El punto importante que debemos resaltar de este problema es que ïnternaliza"la externalidad.*

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1^s)}{\partial L_1} + p_2 \frac{\partial F^2(L_1^s, L_2^s)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1^s, L_2^s)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

donde lo superindice s denota las demandas óptimas desde el punto de vista *social.*

Nota técnica 14 *El fenómeno de internalización de la externalidad se ve reflejado en el término* $p_2 \frac{\partial F^2(L_1^s, L_2^s)}{\partial L_1}$*. Obsévese que este término es negativo. Esto será importante más adelante cuando escribamos el problema de optimización individual de cada firma y caracterizemos las demandas óptimas dese el punto de vista privado.*

El problema de optimización individual de las firmas es:

$$\max p_1 F^1(L_1) - wL_1$$

para la firma 1 y,

$$\max p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2$$

para la firma 2. Las condiciones de primer orden son, respectivamente:

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1^p)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1^p, L_2^p)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

donde el superindice p denota las demandas optimas desde el punto vista *privado.*

Nota técnica 15 *Es fácil ver que* $L_1^p > L_1^s$*. Esto es consecuencia del hecho que* $\frac{\partial F^2(L_1^s, L_2^s)}{\partial L_1} < 0$*. Es decir, la firma 1 al no internalizar la externalidad negativa que genera sobre la firma 2 demanda más trabajo que lo que es óptimo desde el punto de vista social.*

Soluciones al problema de ineficiencia en la producción

Una pregunta fundamental es cómo reestablecer mediante algun mecanismo la optimalidad social teniendo en cuenta los incentivos privados. En términos generales, cuando se presenta alguna ineficencia en el mercado, se abre espacio para la intervención del gobierno en busca de alinear los incentivos sociales y privados. Concretamente, Pigou propuso introducir un impuesto o subsidio con el fin de alinear los incentivos. En el caso de un impuesto, la idea es tributar a la firma 1 con el fin de reducir su escala de operación y acercar su demanda de trabajo al óptimo social. Formalmente, supongamos que el gobierno impone un impuesto τ sobre los ingresos de la firma 1. Entonces el problema de la firma 1 se convierte en:

$$\max\,(1-\tau)\,p_1 F^1(L_1) - wL_1$$

y las condiciones de primer orden son:

$$p_1\,(1-\tau)\,\frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} - w = 0$$

La firma 2 resuelve el mismo problema anterior. Obsérvese que no suponemos que la firma 2 recibe algun tipo de subsidio. Es decir, lo recaudado por el gobieno tributando la firma 1 no es entregado a la firma 2. El impuesto tiene como único fin incentivar a la firma 1, afectando el precio relativo de producción con relación a sus costos, a disminuir su excesiva demanda de trabajo. Puesto que la firma 2 resuelve el mismo problema, si el gobierno escoge una tasa impositiva:

$$\tau = 1 - \frac{p_2 \frac{\partial F^2(L_1^s, L_2^s)}{\partial L_2}}{p_1 \frac{\partial F^1(L_1^s)}{\partial L_1}}$$

entonces la solución descentralizada coincide con la solución socialmente eficiente.

En el caso de un subsidio, la solución de Pigou consiete en subsidiar la firma por cada unidad que produzca por debajo de su nivel óptimo de produción.

La solución de Pigou es bastante interesante sin embargo, podríamos resaltar varios problemas. Por ejemplo, el impuesto óptimo es dificil de calcular ya que supone que el gobierno conoce perfectamente las tecnologías de ambas firmas. Otra dificultad esta associada a la eficiencia con la que el gobierno puede recaudar este impuesto. Por ejemplo, si la firma tiene algún margen para evadir la tributación del gobierno, quizás resulte aún más dificil determinar la tasa de tributación óptima.

En un artículo muy importante en 1960 titulado *The Problem of Social Cost*, por el cual el autor le fue otrogado el premio Nobel de Economía en 1991, Ronald Coase expuso la siguiente idea. El notó que en muchas ocasiones el problema de la ineficiencia que ocurria en casos como el que hemos expuesto anteriormente, se debía a la falta de un mercado para la externalidad que mediara el efecto que sobre los otros agentes tiene su producción. En el caso particular de esta sección es claro que no existe un mercado para comprar o vender contaminación, razón por la cual, la firma 1 no internaliza la contaminación que produce en el río. De la misma forma, la firma 2 no tiene la posibilidad de comprar agua sin contaminar. Más notable aún fue observar que la razón por la cual no existia un mercado para este "bien", la contaminación, era la ausencia de derechos de propiedad bien definidos sobre este bien. Para ser más precisos, la ausencia de derechos de propiedad bien definidos se refiere al derecho o no a contaminar. En primer lugar, podríamos argumentar que la firma 2 tiene el derecho a un río sin contaminación. De la misma forma podríamos argumentar que es la firma 1 tiene el derecho a contaminar. En cualquiera de los dos casos es claro que la deficinición y asignación precisa de quién de las dos partes tiene los derechos sobre el "biençontaminar es el primer paso en la creación de un mercado para el bien. Por otro lado, la presencia de costos de transacción hace referencia a una forma muy precisa de estos costos. Específicamente, aquellos costos que impedirían una negociación privada creíble entre las partes con relación a un posibe intercambio del bien en cuestión. Supongamos que una vez definida la propiedad sobre el bien, los agente pueden negociar un intercambio del bien y que la negociación no requiere de un agente externo que garantice el cumplimiento del contrato. Es decir, en ausencia de este costo de transacción que podría verse reflejado en la intervención del gobierno para garanatiza el cumplimiento o la contratación de abogados para precisar los contratos en caso de una eventualidad negativa para alguna de las partes, la contratación privada tendría el efecto de establecer un precio de negociación para el bien. En estas circunstancias podriamos decir que se han dado las dos condiciones más importantes para la creación de un mercado para el bien contaminación: propiedad del bien y precio. Sorprendentemente, Coase no solamente mostró que el problema radicaba en la falta de derechos de propiedad sino que demostró que, en ausencia de costos de transacción, es posible reestablecer la eficiencia social independientemente de a quién se les otorgue los derechos. Ésto es conoido como el teorema de Coase. Ilustramos todas estas idea a través del ejemplo de la seccción aterior.

Vamos a mostrar que en ambos casos es posible, mediante la negociaión privada entre las partes reestablecer el óptimo social y que la solución no depende de a quién se le otorguen los derechos (una ilustración del teorema de Coase). Sin embargo, a quién se le otorgue los derechos y la forma la negociación privada sí tiene consecuencias distribucionales.

Caso 3 (La segunda firma tiene derecho a un río sin contaminación) *Consideremos de nuevo el problema de la firma 2. Dada una demanda de trabajo* L_1 *por parte de la firma* 1 *el máximo beneficio posible de la firma* 2 *es:*

$$\pi_2(L_1) = \max_{L_2} p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2$$

Si la firma 1 *no operara entonces los beneficios de la firma* 2 *serían* $\pi_2(0)$. *Al operar a una escala* L_1 *la firma* 1 *perjudica a la firma* 2 *y el costos para esta ultima es:* $\pi_2(0) - \pi_2(L_1)$. *Ahora, dado* L_1 *sea* $L_2 = h(L_1)$, *la solución óptima al problema anterior. Entonces la función de beneficios de la firma se puede escribir como:*

$$\pi_2(L_1) = p_2 F^2(L_1, h(L_1)) - wh(L_1)$$

Al ser responsable la firma 1 por la contaminación el río entonces ella debe compensar a la firma 2. La cantidad en la que debe compensarla es igual al perjuicio causado: $\pi_2(0) - \pi_2(L_1)$. *Luego, siendo la firma 1 consiente de este costo adicional el probema que enfrenta es:*

$$\max p_1 F^1(L_1) - wL_1 - (\pi_2(0) - \pi_2(L_1))$$

y la firma 2 resuelve:

$$\max p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2 + (\pi_2(0) - \pi_2(L_1))$$

Las condiciones de primer orden son, respectivamente,

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} + \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

Ahora, como $\pi_2(L_1) = p_2 F^2(L_1, h(L_1)) - wh(L_1)$ *entonces:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1} + \left(p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} - w \right) \frac{\partial h(L_1)}{\partial L_1} \\ &= p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1} \end{aligned}$$

por las condiciones de primer orden de la firma 2. Luego, las condiciones de primer orden de las dos firmas se reducen a las condiciones de optimalidad social.

Caso 4 (La primera firma tiene derecho a contaminar el río) *En este caso, la firma 2 puede compensar a la firma 1 con el fin de que esta disminuya la contaminación del río. Supongamos que la firma 1, gracias a la compensación de la firma 2, disminuye su escala de operación a* $L_1 < L_1^p$. *Por lo tanto la firma 2 estaría dispesta a compensar a la firma 1 con* $\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p)$ *ya que este sería el aumento en el beneficio de esta última. Luego, el problema que la firma 1 resuelve es:*

$$\max p_1 F^1(L_1) - wL_1 + (\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p))$$

y la firma 2 resuelve:

$$\max p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2 - (\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p))$$

Las condiciones de primer orden son, respectivamente,

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} + \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

y recordamos que:

$$\frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1}$$

entonces reestablecemos la optimalidad social.

Nota técnica 16 *La forma específica de la negociación tiene efectos distribucionales. Suponga que la segunda firma tiene derecho a un río sin contaminación y que la negociación consiste en que la segunda firma le hace una oferta a la primera, acepta o rechaza de la siguiente forma: La segunda firma demanda una compensación T por los perjucicios causados. Luego, la segunda firma va escoger la compensación igual al menor valor que hace indiferente a la firm uno aceptar la propuesta o rechazarla. Es fácil mostrar que este tipo de negiciación también restablece el nivel de producción socialmente eficiente pero distinto a las dos soluciones anteriores.*

Obsérvese que la primera solución que se discutió anteriormente correponde ala caso en el que la primera firma le ofrece una compensación a la segunda igual al perjucio causado.

La segunda solución corresponde al caso en el que la primera firma tiene derecho a contaminar y la segunda le ofrece un compensación por reducir su actividad. Finalmente, podríamos considerar el caso en el que la primera firma tiene derecho a contaminar y le ofrece un contrato a la segunda en la que, condicional a recibir una comensación estaría dispuesta a reducir su actividad.

Todas estas formas de negociación privada y asignación de derechos de propiedad reestablece eficiencia social y todas tienes consecuencias distribucionales distintas.

Nota técnica 17 *Las soluciones anteriores pueden no alcanzar el primer mejor en presencia de asimetrías de información.*

Ejercicio 42 *Basado en Varian [1994]: A Solution to the Problem of Externalities when Agents are Well-Informed. Considere dos fimas $i = 1, 2$. Sus beneficios son $\pi_1(x_1) = rx_1 - c(x_1)$, donde r es el precio de venta del producto, x_1 la cantidad que ofrece la firma 1 y $c(x_1)$ el costo. $\pi_2(x_1) = -e(x_1)$. Es decir, la firma 1 impone una externalidad en la firma 2.*

1. *Caracterice la solución eficiente de este problema como un problema de optimización de un planificador central y escriba las condidiciones de primer orden del problema. Mostrar que la solucion descentralizada no satisface estas ecuaciones y, por lo tanto, es ineficiente.*

   Ahora considere la siguientes soluciones (1). Pigou: Supone que el regulador conoce las tecnologías. Este mecanismo motiva una modificación que relaja el anterior supuesto y es la intuición básica del mecanismo de compensación. (2) Coase: negociación privada en ausencia de costos de transacción y derechos de propiedad bien definidos.

   En el primer caso Cobrar un impuesto a la firma 1 igual a $e(x)$. El problema de la firma 1 es:

$$rx_1 - c(x_1) - e(x_1)$$

y las C.P.O son:
$$r - c'(x_1^*) - e'(x_1^*) = 0$$
luego si el regulador le impone un impuesto $p^* = e'(x_1^*)$ *y la firma resuelve:*

$$rx_1 - c(x_1) - p^* x_1$$

entonces esta tributación (lineal) implementa el mecanismo de Pigou. El problema es que el regulador no conoce $e(x_1)$.

2. *Haga un análisis a la Coase de este problema y mostrar cómo, mediante la negociación privada, es posible llegar a equilibrios eficientes.*

14.2.2. Externalidades en el bienestar (bienes públicos)

Como mencionamos anteriormene existen varias circunstancias en las cuales una externalidad afecta directamente el bienestar de los agentes. El prototipo de ejemplo es el caso en el que los agentes consumen un *bien público*. Para definir un bien público es necesario introducir la idea de bienes no excluyentes y bienes no rivales. Un bien es no excluyente si una vez producido es imposible o muy costoso impedir su utilización o consumo a otros agentes.

Ejemplo 32 (Bienes no excluyentes) *Defensa nacional, programas de erradicaión de enfermedades mediante fumigaciones.*

Decimos que un bien no rivaliza o es no rival, si el consumo de una unidad de este no impide el cosumo de esa misma unidad por otros agentes (el costo marginal social de producción de una unidad adicional es cero).

Ejemplo 33 (Bienes que no rivalizan) *La televisión satelital y las ideas (el cálculo, la teoría e la relatividad), etc. son buenos ejemplos de bienes que no rivalizan. Ejemplos menos claros pero muy comúnes en la vida diaria son las autopistas, aeropuertos y parques públicos. Éstos podrían considerarse no rivales siempre que la utilización de éstos no llegue a congestionarlos.*

Estos conceptos si bien son diferentes están intimamente relacionados.

Definición 23 (Bien público) *Decimos que un bien es público si es a la vez un bien no excluyente y un bien no rival.*

Ejercicio 43 *¿Son las ideas un bien no excluyente? ¿Es la televisión satelital un bien no excluyente? ¿Es Internet un bien público?*

Al igual que en el caso de externalidades en la producción, típicamente las asignaciones de recursos que incluyen un bien público pueden ser ineficientes si se realizan únicamente a través del mecanismo de precios.

- Consideremos una comunidad de n individuos que debe determinar el nivel x de la provisión de un bien público para ellos.

- Cada individuo determina su contribución individual c_i. La contribución total C financia una cantidad $x = C$ del bien público.
- Cada individuo tiene una dotación inicial w_i de un bien privado.
- Las preferencias de los individuos son de la forma:

$$U_i : R_+ \times (-\infty, w_i] \to R$$

donde U_i es creciente en el primer argumento (consumo del bien público), decreciente en el segundo (contribución individual) y estrictamente cóncava.

- El problema de un planificador central es:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i \\ &s.a \\ &x \leq C, x \geq 0, w_i \geq c_i \end{aligned}$$

Suponiendo una solución interior es fácil demostrar que la suma entre individuos de las tasas marginales de sustitución entre bienes públicos y privados es igual a la tasa marginal de trasnformación (condición de Bowen-Lindahl-Samuelson).

- Es fácil ver que la solución descentralizada es inneficiente.

Soluciones al problema de ineficiencia en el caso de bienes públicos

- Decimos que (p_i^*, c_i^*, x^*) define un equilibrio de Lindahl para el problema antrior si:

  1. Maximización individual:

  $$\begin{aligned} &\max U_i \\ &p_i^* x = c_i \\ &c_i, x \geq 0 \end{aligned}$$

  2. $\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$
  3. $\sum_{i=1}^{n} c_i^* = x$

- Es fácil demostrar que un equilibrio de Lindahl es eficiente.
- Sin embargo el ambiente económico donde toma lugar el mecanismo de Lindahl es poco realista.

15. Elección social

- Existen muchas situaciones en las cuales un grupo de personas con diferentes preferencias deben tomar una decisón colectiva (ciudadanos que escogen un presidente o el senado y representantes a la cámara, una junta directiva de una empresa cuando debe tomar una decisión de inversión, las asambleas de accionistas, etc.). Llamaremos este el problema de elección social.
- La pregunta general que nos hacemos es cómo de un conjunto de alternativas, escogemos una alternativa (o varias) que en cierto sentido sea(n) çonsistente(s)çon las preferencias individuales de los agentes.
- Frente a este problema surgen varias preguntas de tipo positivo, ¿Existe un forma de elección social con cierto tipo de características predeterminadas?, y normativo ¿Son las características de una forma específica de elegir socialmente deseables desde un punto de vista social?.
- ¿Cómo toman las sociedades deciciones colectivas?
- ¿En qué forma las acciones conjuntas de un grupo de personas reflejan los intereses de sus miembros?
- ¿Bajo qué criterios podemos determinar que una situación social es preferible a otra?
- ¿Cómo se pueden agregar las preferencias de los individuos para dar origen a preferencias sociales?
- Para ganar un poco de intución y apreciar las dificultades con las que podemos tropezar veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 34 *(Manipulabilidad del sitema de elección social). Supongamos que tenemos tres partidos políticos con el mismo número de representantes en cierto órgano decisorio. Existen tres proyectos en consideración A, B y C y apenas uno de ellos debe ser escogido. Sean $\succ_1, \succ_2$ y $\succ_3$ las relaciones de preferencia de los tres partidos y supongamos que estas son sus preferencias:*

$$\begin{aligned} A &\succ {}_1B \succ_1 C \\ B &\succ {}_2C \succ_2 A \\ C &\succ {}_3A \succ_3 B \end{aligned}$$

y supongamos que el presidente de este órgano establece el siguiente mecanismo para seleccionar un proyecto. Se escogen dos proyectos .^{a}leatoriamenteτ se selecciona uno por mayoría simple. El ganador compite con el tercer proyecto de nuevo por mayoría simple. El ganador de esta segunda ronda es seleccionado como el proyecto aprovado. Si bien parece razonable no es es dificil convenserce que el presidente puede manipular el resultado final de la siguiente forma.

Supongamos que este desea que sea aprobado el proyecto A (el argumento es similar para cualquiera de los otros dos casos). Entonces este propone que sean votados primero los proyectos B y C. Es fácil ver que en la segunda ronda saldrá seleccionado el proyecto A. De hecho, cualqiera que sea el proyeco que se deje para ser votado en la segunda ronda saldrá seleccionado independientemente de quien gane en la primera ronda.

Ejemplo 35 (Paradoja de Codorcet) *.Una sociedad hipotética:*

- *Tres alternativas disponibles* $X = \{x, y, z\}$
- *Tres individuos* $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$
- *Preferencias individuales*

1	2	3
x	y	z
y	z	x
z	x	y

- *Bajo la regla de votación mayoritaria:* $x \succ y$ *y* $y \succ z$*, pero ¡* $z \succ x$ *!*
- *Las preferencias sociales no serían transitivas*
- *Luego, el mecanismo de elección social mediante voto mayoritario no es transitivo. Por lo tanto, las preferencias sociales resultantes de este mecanismo de agregación no son racionales.*
- *Obsérvese que este ejemplo de preferencias también es manipulable en el sentido del ejemplo anterior.*

Nota técnica 18 *Osbérvese que en el ejemplo anterior, sin importar cual sea la elección social, siempre habrá dos agentes que prefieren estrictamente una misma alternativa distinta a la selecionada socialmente (i.e., Por ejemplo, si socialmente se selecciona* x*, los votantes 2 y 3 prefieren estrictamente* z *a* x *y así para cualquier elección social que se realice). Es decir, cualquiera que sea la elección social siempre habrá dos terceras partes de los votantes insatisfechos.*

- Formalizamos los ejemplos anteriores e introducimos otro metodos estándar para resolver problemas de agregación de preferencias. Estos son:
  1. Mayoría simple
  2. Segunda vuelta
  3. Eliminación Secuencial
  4. Conteo de Borda

Definición 24 (Conteo de Borda) *Sea* $B^i(x) = \#\{\text{alternativas a las cuales el agente } i \text{ prefiere } x\}$*. Las preferencias sociales se define como:* $xRy \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N} B^i(x) \geq \sum_{i=1}^{N} B^i(y)$

Ejemplo 36 *Considere tres agentes con preferencias como aparecen a continuación y calculemos las preferencias sociales de acuerdo a la función de agregación de Borda.*

$$\begin{aligned}
x &\succ {}_1 y \succ_1 z \Rightarrow B^1(x) = 2, B^1(y) = 1, B^1(z) = 0 \\
z &\succ {}_2 x \succ_2 y \Rightarrow B^2(x) = 1, B^2(y) = 0, B^2(z) = 2 \\
z &\succ {}_3 x \succ_3 y \Rightarrow B^3(x) = 1, B^3(y) = 0, B^3(z) = 2 \\
&\Rightarrow \\
x &\succsim z
\end{aligned}$$

Ahora, suponga que las preferencias del primer agente cambian a:

$$x \succ_1' z \succ_1' y \Rightarrow B^1(x) = 2, B^1(y) = 0, B^1(z) = 1$$

Entonces las preferencias de los agentes por las alternativas x y z no han cambiado sin embargo, con las nuevas preferencias, la elección social es que z es estrictamente preferible a x.

Ejemplo 37

Grupo 1 *18 agentes*	*Grupo 2* *12 agentes*	*Grupo 3* *10 agentes*	*Grupo 4* *9 agentes*	*Grupo 5* *4 agentes*	*Grupo 6* *2 agentes*
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*E*
D	*E*	*B*	*C*	*B*	*C*
E	*D*	*E*	*E*	*D*	*D*
C	*C*	*D*	*B*	*C*	*B*
B	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*

Métodos: I. Mayoría simple (a), II. Segunda vuelta, III. Eliminación Secuencial, IV. Conteo de Borda

Grupo 1 *18 agentes*	*Grupo 2* *12 agentes*	*Grupo 3* *10 agentes*	*Grupo 4* *9 agentes*	*Grupo 5* *4 agentes*	*Grupo 6* *2 agentes*
A (72)	*B (48)*	*C (40)*	*D (36)*	*E (16)*	*E (8)*
D (54)	*E (36)*	*B (30)*	*C (27)*	*B (12)*	*C (6)*
E (36)	*D (24)*	*E (20)*	*E (18)*	*D (8)*	*D (4)*
C (18)	*C (12)*	*D (10)*	*B (9)*	*C (4)*	*B (2)*
B (0)	*A (0)*	*A (0)*	*A (0)*	*A (0)*	*A (0)*

Total: A (72), B (101), C (105), ***D (136)****, E (134)*

- Nuestra primera aproximación a la teoría de elección social la haremos a través de un caso particular muy importante, los sistemas de votación cuando el conjunto de alternativas son dos. Esto se llaman comúnmente, sistemas de votación *sí o no*. Tal es el caso cuando en un país debe elegirse un presidente entre dos candidatos o, cuando un pueblo debe votar a favor o en contra de una enmienda constitucional.

15.1. Sistemas de elección de dos alternativas

- Sea $X = \{0, 1\}$ el conjunto de alternativas y $\mathcal{I} = \{1, ..., I\}$ el conjunto de electores.
- Una función de elección social es $f : \mathcal{R}_e(X)^I \to \mathcal{R}(X)$. Intuitivamente, dadas las preferencias de los agentes por el conjunto de alternativas $x \in X^I$, $f(x)$ representa la elección que la función de elección social hace de las dos alternativas.
- Obsévese que, en el caso de dos alternativas, X^I se puede interpretar como $\mathcal{P}_e(X)^I$, donde $\mathcal{P}_e(X)$ representa el conjunto de todas las relaciones de preferencia posibles sobre el conjunto X tales que no hay indiferencia entre las alternativas. Como el conjunto solo tiene dos alternativas, un elemento de $\mathcal{P}_e(X)$ simplemente determina cual de las dos alternativas es preferible.
- Obsévese que, por el momento, una función de elección social no permite que los agentes san indiferentes entre las dos alternativas y la función de elección social selecciona una sola alternativa.
- A continuación introducimos algunos ejemplos importantes.

Ejemplo 38 *Sistema de votación de la Comunidad Europea (1958).*

$\mathcal{I} = \{$*Francia (4), Alemania (4), Italia (4), Belgica (2), Holanda (2), Luxemburgo (1)*$\}$

El número entre paréntesis denota el peso que el voto de cada país tiene relativo al voto de Luxemburgo que lo hemos normalizado en uno. La función de elección social es 1 si al sumar los voto ponderados de los seis países obtenemos un número mayor o igual a 12, y cero de lo contrario.

Ejemplo 39 *Concejo de seguridad de las Naciones Unidas. Existen dos tipos de miembros en el concejo de seguridad de las Naciones Unidas, miembros permanentes y aquellos que no lo son. Los miembros permanentes son cinco: China, Inglaterra, Francia, Russia y Estads Unidos. Los que no son permanentes son 10 en total. Luego el Consejo de Seguridad estaá constituido por 15 países. La función de elección social funciona de la siguiente forma. Toma el valor 1 si existen por lo menos nueve votos favorables (iguales a 1) y si ninguno de los miembros permanentes veta la decision (i.e., elige cero como su preferencia), y cero de lo contrario.*

Ejemplo 40 *Sistema Federal en los Estados Unidos. El cuerpo decisiorio en el Congreso de los Estados Unidos lo conforman 537 congresistas (435 en la cámara y 100 en el senado) más el Presidente y el Vicepresidente de la nación. Para que la función de elección social sea 1, las preferencas del cuerpo decisorio tienen que satisfacer:*

1. *Senado y Cámara tienen que cada una votar favorablemente (i.e. elegir uno como sus preferencias) en donde la decisión en Senado y Cámara se determina por mayoría simple. En caso de empate en el senado, el vicepresidente decide.*

2. *El Presidente puede vetar cualquier decisión excepto cuando esta tiene la aprobación de dos terceras partes de senado y cámara.*

Ejemplo 41 *Sistemas de elección para enmiendas constitucionales en el Canadá. Los electores son diez provincias. Para pasar un propuesta de enmienda costitucional por lo menos siete provincias tienen que votar favorablemente y las que voten favorablemente tienen que tener una población superior al 50 % de la totalidad del país.*

- Intuitivamente, algunos sistemas de elección le asignan pesos relativos a las preferencias de cada elector y la elección social se determina mediante una suma ponderada. Formalizamos esta intuición en la siguinete definición.

Definición 25 *Una función de elección social* $f : X^I \to X$ *es un sistema de votación por pesos si existe* $\alpha \in R^I$ *y* $q \in R_+$ *tal que:*

$$f(x) = \begin{pmatrix} \text{1 si } \alpha \cdot x \geq q \\ \text{0 de lo contrario} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 42 *El sistema de elección de la Comunidad Europea es un sistema de votación por pesos (verificar esta afirmación).*

Ejemplo 43 *El sistema del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas es un sistema de votación por pesos. Para demostrar esta afirmación sea* x *el peso relativo que tiene el voto de los miembros del Consejo permanente relativo a los demás que normalizamos en uno. Entonces para que una proposición pase es necesario que* $5x + 4 \geq q$ *y en caso de veto,* $4x + 10 < q$. *Estas desigualdades implican que* $x > 6$. *Luego una solución (entre muchas) a este sistema de desigualdades es,* $x = 7$ *y* $q = 39$.

- La importancia de los sistemas de votación por pesos es que satisfacen algunas características muy deseables desde el punto de vista social. Por ejemplo, es fácil ver que todo sistema de votación por pesos satisface la propiedad de unanimidad. Esto es, si todos los electores están de acuerdo en una decisión, la función de elección social debe respetar la decisión por unanimidad.

Ejercicio 44 *Probar la anterior afirmación.*

- El sistema de elección federal de los Estados Unidos descrito anteriormente, ni el sistema de decisión de enmiendas constitucionaes del Canada, son sistemas de votación por pesos.

15.1.1. Sistemas de votación

- Sea X un conjunto de n alternativas y $\mathcal{I} = \{1, ..., I\}$ el conjunto de electores.

- Una función de elección social es $f : \mathcal{P}_e(X)^I \to X$. USAR CORRESPONDENCIA DE ELECCION SOCIAL PARA PERMITIR INDIFERENCIAS.
- Obsévese que en esta definición una función de elección social no se permite que los agentes sean indiferentes entre ningun par de alternativas y la función de elección social selecciona una o varias alternativas.

  1. Mayoría simple.
  2. Borda (1781): Primero en la lista obtiene n puntos segundo en la lista obtiene $n-1$ puntos, etc. Más adelante introducimos un generalización cuando los agentes pueden ser indiferentes entre alternatvas.
  3. Hare (1861): La idea es identificar un ganador de Codorcet (un agente con más de la mitad de votos favorables) una vez se eliminan las alternativas menos deseadas.
  4. Votación secuencial por parejas con agenda fija.
  5. Dictador.

Ejemplo 44

Agente 1	*Agente 2*	*Agente 3*	*Agente 4*	*Agente 5*	*Agente 6*	*Agente 7*
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

El resultado de usar voto mayoritario simple es a, Borda es b, Hare es c, cuando la agenda es a, b, c, d, e la votación elige d. Finalmente si elegimos el agente 7 como dictador,su elección sería e.

- Propiedades deseables:

  1. Pareto: Si todos los agentes prefieren estrictamete la alternativa x a y entonces y no es elegido socialmente.
  2. Ganador de Codorcet: Si existe un ganador de Codorcet, entonces la función de elección social lo elige.
  3. Monotonicidad o no perversidad: Si x es elegida socialmente cuando los agentes tienes cierta preferencias, entonces si en alguno de ellos x sube en el ranking, entonces x debe seguir siendo elegido socialmente.
  4. IIA: Suponga que x es elegido socialmente y y no lo es cuando los agentes tienes ciertas preferencias. Si las preferencias de los agentes cambian pero no las preferencias de los agente por x y y, entonces y sigue siendo no elegido socialmente (puede ser que x tampoco sea elegido).

- Obsérvese que estas son versiones de propiedades estádard para funciones de bienestar social.

- Resultados positivos:

Sistema	Pareto	Codorcet	Monotonicidad	IIA
Mayoritario	X			X
Borda	X			X
Hare	X			
Secuencial - AF		X		X
Dictador	X		X	X

- Resultados negativos

15.1.2. Medidas de poder

- De ahora en adelante en esta sección sobre sistemas de votación vamos hacer la siguiente hipótesis.

Condición 3 *Suponemos que todo sistema de votación satisface:*

1. *Monotonicidad: si una coalición es ganadora entonces agregando un miembro a la coalición esta sigue siendo ganadora.*

2. *La coalición de todos los individuos es ganadora y por definición, la coalición sin ningún individuo no es ganadora.*

- Otro caracerística que salta a la vista de los ejemplos anteriores es que algunos electores tienen más "poder"que otros en un mismo sistema de votación. Una forma de formalizar este hecho es mediante el índice de poder de Shapley y Schubik.

- Para introducir este indice necesitamos un par de conceptos. Una lista ordenada de los elementos de $\mathcal{I}$ es una lista de la forma $(i_1, ...i_I)$ donde $i_k \in \mathcal{I}$ y todos ellos son diferentes. Es decir, una lista ordenada es simplemente una forma de ordenar a todos los agentes en una "fila". El número de formas diferentes de ordenar el conjunto de agentes es $I! = I\,(I-1) \times ... \times 2 \times 1$.

Definición 26 *Una coalición de electores es ganadora, si al votar todos los miembros de la coalición favorablemente una de las alternativas, esto garantiza la elección social de esa alternativa.*

Definición 27 *Sea $(i_1, ...i_I)$ una lista ordenada del conjunto de agentes. Decimos que un agente i_k es pivotal en la lista ordenada si ninguna de las coaliciones $\{i_1\}$, $\{i_1, i_2\}$, ..., $\{i_1, ..., i_{k-1}\}$ es una coalición ganadora mientras que la coalición $\{i_1, ..., i_k\}$ sí lo es.*

Definición 28 (Indice de Poder de Shapley y Schubik) *El índice de Shapley y Schubik de un elector i_k, $ISS\,(i_k)$, se define de la siguiente forma:*

$$ISS\,(i_k) = \frac{\#\ \textit{de listas ordenadas en las que } i_k \textit{ es pivotal}}{I!}$$

- Obsérvese que $ISS\,(i_k) \in (0,1)$ y $\sum_{k=1}^{I} ISS\,(i_k) = 1$. Por esta razón, el índice de Shapley Schubik de un elector es también conocido como la fracción de poder del votante.

Ejemplo 45 *Poder de los países de la Comunidad Europea. La justificación de los siguientes resultados no es fácil pero son una buena ilustración de índice de Shapley y Schubik. La siguiente tabla resume los resultados de analizar el sistema de elección de la Comunidad Europea a la luz del índice de poder.*

País	*Peso relativo del voto*	*% de votos*	*ISS*
Francia	*4*	*23.5*	*23.3*
Alemania	*4*	*23.5*	*23.3*
Italia	*4*	*23.5*	*23.3*
Belgica	*2*	*11.8*	*15.0*
Holanda	*2*	*11.8*	*15.0*
Luxemburgo	*1*	*5.9*	*0*

Nota técnica 19 *Obsérvese que la proporción de votos de cada país no se corresponde con la fracción de poder del país (el ISS).*

Ejemplo 46 *Consideremos un conjunto con tres agentes $\mathcal{I} = \{1,2,3\}$. El peso del voto del elector 1 es 50 el del elector 2 es 49 y el del elector 3 es 1. La regla de elección social establece que se necesitan 51 votos favorables para ser aprobada una proposición. El total de listas ordenada es 6 (aquellos entre paréntesis denotan el elector pivotal de cada una de las listas):*

1	(2)	3
1	(3)	2
2	(1)	3
2	3	(1)
3	(1)	2
3	2	(1)

Luego: $ISS\,(1) = \frac{2}{3}$, $ISS\,(2) = \frac{1}{6}$, $ISS\,(3) = \frac{1}{6}$. Los electores 2 y 3 tiene el mismo índice de poder sin embargo, el elector 2 tiene 49 veces más votos que el elector 3.

15.2. Teoría de elección social: el caso general

- Vamos a generalizar el problema de elección social de la sección anterior en dos aspectos fundamentales. El primero se refiere al conjunto de alternativas X. En esta sección lo único que vamos a suponer sobre X es que es un conjunto finito, $X = \{x_1, ...x_n\}$. De nuevo, esto es una simplificación considerable pues la teoría se ha desarrollado para el caso de conjuntos de aternativas de dimensión infinita. El segundo está relacionado con la definición de función de elección social. Antes de definir una función de elección social necesitamos refrescar nuestra discusión sobre las relaciones de preferencia.

- Utilizaremos R para denotar una relación de preferencia (débil) y racional sobre el conjunto de alternativas X y P para denotar una relación de preferencia (estricta) y racional sobre el conjunto de alternativas X. Recordemos que en las primeras secciones de estas notas definimos las relaciones de preferecia como relaciones de preferecia débiles. Sin embargo, como observamos en esa ocasión, toda relación de preferencia débil define una relación de prefrencia estricta y viceversa y, por lo tanto, extendemos nuestra definición de racionalidad de las preferencias al caso en que las preferencias son estrictas: un relación de preferencia estricta es racional si la relación de preferencia débil que definimos a partir de ella es una relación de preferencia (débil) racional.

- Sea $R(X)$ el conjunto de todas las relaciones de preferencias sobre X.

Definición 29 *Una función de elección social es una función* $f : R(X)^I \to R(X)$.

- Denotamos la imagen de $(R^1, ...R^I)$ por f como $R = f(R^1, ...R^I)$

- Obsérvese que si X tiene apenas dos alternativas la definición de la sección anterior no es un caso particular de ésta. La diferencia radica que en la sección anterior consideramos sólo preferencias estrictas sobre el conjunto de alternativas y ahora vamos a considerar preferencias débiles. Ésta diferencia no es relevante para ilustrar las ideas principales de la teoría de elección social.

- Es importante señalar que asumimos implícitamente que la función de elección social está definida sobre todas las posibles relaciones de preferencia racionales sobre X. Esta podría considerarse un supuesto fuerte, pues algunas preferencias de los electores pueden no ser completamente plausibles en cuyo caso, bastaría definir la función de elección para cierto subconjunto de preferencias. Esta observación cobra aún más relevancia cuando el conjunto de alternativas es infinito. Igualmetne, es importante el hecho de que la imagen de la función de elección social es una relación de preferencia racional. Este es un hecho no trivial pues, como puede deducirse de la paradoja de Codorcet, el voto mayoritario no es una función de elección social. Cada una de estas hipótesis que hemos hecho implícitamente podría tomarse como un objeto de estudio.

- El problema de elección social se puede plantear formalmente como el problema de identificar un conjunto de propiedades socialmente "deseables"que debería de satisfacer cualquier candidato a función de elección social y por supuesto, resolver el problema de la existencia de funciones de elección social que, en efecto, satisfagan las propiedades deseadas. El primer problema es un problema de carácter normativo. El segundo problema es un problema de carácter positivo. Abordamos estos en este orden hasta llegar al célebre teorema de imposibilidad de Arrow.

- Las siguinetes propiedades conocidas como axiomas de Arrow son el marco de referencia de toda la teoría de elección social.

15.2.1. Axiomas de Arrow

Axioma 6 (Unanimidad) *Unanimidad o optimalidad de Pareto débil. Supongamos que para* $x, y \in X$ *y* $(R^1, ...R^I) \in R(X)^I$ *si* xP^iy *para todo* $i \in \mathcal{I}$ *entonces* xPy.

- Este axioma es quizas el menos controvertido pues simplemente dice que si existe unanimidad sobre la preferencia de x sobre y el mecanismo de elección social debe respetar este preferencia de sus agentes.

Axioma 7 (Independencia de alternativas irrelevantes) *Sean* $(R^1, ...R^I)$, $(\widetilde{R}^1, ...\widetilde{R}^I) \in P(X)^I$, $x, y \in X$. *Entonces si para todo* i, $xR^iy \Leftrightarrow x\widetilde{R}^iy$ *entonces* $xRy \Leftrightarrow x\widetilde{R}y$.

- Es decir, si las preferecias entre las alternativas x y y no cambian cuando cambian las preferencias de los agentes, entonces la eleción social entre éstas no debe cambiar cuando se utilizan las primeras preferencias en la función de elección social o las últimas. Otra forma de decir esto es que la elección social entre dos alternativas solo depende de las preferenicas entre estas dos alternativas y no de las preferencias por otras alternativas. De ahi el nombre que se le da al axioma. Este axioma es quizás más controvertidos.

Axioma 8 *No existencia de un dictador. No existe* i^d *tal que para todo* $x, y \in X$, $xR^{i^d}y \Rightarrow xf(R^1, ..., R^{i^d}, ..., R^I)y$ *independientemente de las preferencias* R^i *para todo* $i \neq i^d$. *Un agente* i^d *que viole la condición anterior lo llamamos un dictador pues obsérvese que, independientemente de las preferencias de los demás agentes, sus preferencias individuales prevalecen a nivel social. Luego, este axioma dice simplemente que una función de elección social no debería permitir la existencia de un dictador. Este axioma es bien natural.*

- Los anteriores axiomas son carácteristicas mínimas que esperamos cualquier función de elección social satisfaga. Arrow en su tesis de doctorado demostró el siguiente teorema.

Teorema 23 (Teorema de imposibilidad de Arrow) *Si existen más de tres alternativas en el conjunto X, entonces no existe ninguna función de elección social que satisfaga los tres axiomas de Arrow.*

- En particular, cualquier función de elección social que satisfaga los axiomas 1 y 2 de Arrow, implica la existencia de un dictador.

Prueba. La siguiente demostració está basada en Geanakoplos [1996]. La demostración la descomponemos en cuatro pasos:

1. Considere cualquier alternativa $c \in X$ y conjunto de preferencias para la sociedad tal para todo individuo, c es la menos preferible de todas las alternativas. Entonces por el axioma de unanimidad c es socialmente la menos preferible de todas las alternativas.
2. Ahora con las mismas preferencias anteriores de los individuos mueva la alternativa c a las más preferida del individuo 1. Después haga lo mismo para 2 y así sucesivamente. Eventualmente la elección social deberá ser c. Considere ahora el primer individuo n , ta que al modificar sus preferencias de la forma mencionada, la preferencia social por la alternativa c aumenta. En efecto, ésta no solo aumentará sino que pasa a ser una de las más preferidas socialmente a todas las demás (esto se puede demostrar por contradicción).
3. XXXX

■

- El resultado de Arrow es un resultado bastante negativo. Algunas formas de evitarlo son:
  1. Suponer que las relaciones que definen la regla de elección social no son necesariamente transitivas pero que solamente cumplen una propiedad más débil: no existencia de cíclos.
  2. Requerir únicamente que las relaciones de preferencias sociales permitan escoger siempre la mejor alternativa para todo conjunto de alternativas pero no necesariamente ordenar todas las alternativas de menor a mayor.
  3. La función de elección social está definida únicamente para cierto tipo de preferencias (*single-peaked*).
  4. Suponer que las preferencias representan más que una relación en el conjunto de alternativas individualmente ordinal e incomparable entre individuos. Es decir, suponer que las preferencias tienen algún significado cardinal para cada individuo y, en algún sentido, comparables entre individuos.
- En la próxima sección exploramos la alternativa del numeral 4.

Ejemplo 47 (Conteo de Borda) *Supongamos que tenemos un número finito de alternativas X y sea $\mathcal{I}$ el conjunto de agentes. Vamos a definir la siguiente regla de elección social conocida como conteo de Borda. Dada una lista de relaciones de preferencia de los agentes sobre el conjunto X, $(R_1, ..., R_I)$ definimos para cada agente i y para cada alterntiva x, $B^i(x)$ como,*

$$B^i(x) = \#\{\textit{alternativas } y \textit{ tales que } yR_ix\}$$

Con esta definición definimos la siguiente regla de elección social:

$$xRy \Longleftrightarrow \sum_{i\in\mathcal{I}} B^i(x) \geq \sum_{i\in\mathcal{I}} B^i(y)$$

(en caso de igualdad entonces las alternativas son indiferentes).

Es fácil ver que el conteo de Borda satisface el axioma de unanimidad, que no existe un dictador y que no satisface el axioma de independencia de las alernativas irrelevantes. Para ver esto último considere las siguientes preferencias de tres agentes sobre un conjunto de tres alternativas:

$$\begin{aligned} x &\succ {}_1 y \succ_1 z \Rightarrow B^1(x) = 2, B^1(y) = 1, B^1(z) = 0 \\ z &\succ {}_2 x \succ_2 y \Rightarrow B^2(x) = 1, B^2(y) = 0, B^2(z) = 2 \\ z &\succ {}_3 x \succ_3 y \Rightarrow B^3(x) = 1, B^3(y) = 0, B^3(z) = 2 \\ &\Rightarrow \\ x &\succsim z \end{aligned}$$

Ahora, suponga que las preferencias del primer agente cambian a:

$$x \succ_1' z \succ_1' y \Rightarrow B^1(x) = 2, B^1(y) = 0, B^1(z) = 1$$

Entonces las preferencias de los agentes por las alternativas x y z no han cambiado sin embargo, con las nuevas preferencias, la elección social es que z es estrictamente preferible a x.

Ejemplo 48 (Más sobre el conteo de Borda) *En una sociedad hipotética hay dos partidos políticos, los Rojos, que representan el 60 % de la población, y los Azules, que representan el 40 % restante. Se va a realizar una votación para elegir a un funcionario público y, en una fase preliminar, cada partido inscribe un candidato, a saber, R_1 y A_1, respectivamente. En estas condiciones, es claro que cualquier sistema de elección social que refleje positivamente las preferencias de los individuos daría como ganador al candidato R_1, considerando que todos los individuos pertenecientes a un partido prefieren a un candidato de su partido sobre cualquier candidato del otro partido. Sin embargo, antes del cierre de las inscripciones, el partido Azul decide postular un tercer candidato, A_2, que cumple las siguientes características: A_1 es preferido a A_2 por todos los miembros del partido Azul y A_1 es preferido a A_2 por un 70 % de los miembros del partido Rojo. Vamos a responder a las siguientes preguntas:*

1. *¿Existe un ganador de Condorcet o se presenta la paradoja? ¿Si existe, qué candidato es?*

2. *Si la votación se realizara mediante un conteo de Borda, ¿Qué candidato sería el ganador?*

3. *¿Por qué puede afirmarse que la situación descrita en este problema muestra que el conteo de Borda satisface el Teorema de imposibilidad de Arrow? ¿En particular, cuál de los axiomas no se cumple?*

4. *Describa un comportamiento estratégico que podrían seguir los miembros del partido Rojo para garantizar el éxito del candidato R_1, si las elecciones se realizan mediante el conteo de Borda, a pesar de la inscripción del candidato A_2.*

Se puede suponer, sin perdida de generalidad, que esta sociedad está conformada por 100 individuos (o 1000, 10000, 100000, etc.) para facilitar los cálculos.

a. En estas condiciones el candidato R1 es un ganador de Condorcet, porque el 60 % de los votantes lo prefieren a los otros dos candidatos. Específicamente, entre R1 y A1, gana R1; entre A1 y A2, gana A1, y entre R1 y A2, gana R1.

b. Si cada votante asigna los valores 2, 1 y 0 a sus alternativas en orden descendente, de la más a la menos preferida, los puntajes totales obtenidos por cada candidato serían:

A1: (40)(2) + 42 = 122

R1: (42)(2) + (18)(2) = 120

A2: 40 + 18 = 58

Claramente, mediante el conteo de Borda el ganador es el candidato A1

c. Antes de la inscripción del candidato A2 puede afirmarse que el candidato R1 es preferido por esta sociedad al candidato A1. Sin embargo, tras la inscripción de A2, el conteo de Corda establece un ordenamiento social de las preferencias según el cual A1 es preferido a R1. Esto muestra que el conteo de Borda viola el axioma de independencia de las alternativas irrelevantes, es decir, la aparición de una nueva alternativa afecta el ordenamiento original entre R1 y A1.

d. Si los miembros del partido Rojo acordaran, a pesar de sus preferencias, votar de tal forma que más de una tercera parte de ellos (33.3 % o 20 en el caso que aquí nos concierne) eligiera al candidato A2 sobre el A1, el puntaje obtenido por el candidato A1 seria menor que 120 y entonces el ganador de las elecciones, realizadas mediante el conteo de Borda, sería R1, dadas las preferencias de los azules.

Más aun, si los miembros del partido Rojo deciden estratégicamente votar de tal forma que el 50 % elija a A1 sobre A2 y el 50 % restante elija a A2 sobre A1, entonces, sin importar cuales sean las preferencias de los azules, R1 sería el ganador.

15.3. Formas de evitar el teorema de imposibilidad

- Dos formas estándard son:

  1. Relajar el supuesto de transitividad de las preferencias agregadas (por ejemplo suponiendo solo aciclicidad).
  2. Restringiendo el dominio de la función de bienestar social. Por ejmplo suponiendo que las preferencias son de un único máximo.

Ejemplo 49 (Preferencias de un único máximo) *Considere las siguientes preferencias por las alternativas A, C, F, I, T:*

Agente 1	*Agente 2*	*Agente 3*	*Agente 4*	*Agente 5*
A	C	I	T	F
A	C	I	T	F
F	T	C	C	A
I	I	A	I	I
C	A	F	A	C
T	F	T	F	T

Existen dos ordenes que hacen las preferencias anteriores de un sólo máximo: TCIAF y FAICT.

15.4. Funciones de elección social

- A diferencia de las funciones de bienestar social, que toman un perfil de preferencias y lo agregan en un perfilsocial, una función de elección social toma un perfil de preferencias y elige una alternativa social.

Teorema 24 (Gibbard - Sattherwaite) *Supongamos que tenemos una función de elección social que es sobreyectiva y que el conjunto de alternativas tiene por lo menos tres alternativas.Entonces si la función es no manipulable, entonces es dictatorial.*

La demostracion mas sencilla que conozco esta en libro de political game theory.

15.5. Comparaciones inter e intra personales

- El problema de elección social como lo hemos planteado en las secciones anteriores supone que las preferencias de los agentes solo tiene un significado ordinal . Denominamos esto la escala ordinal de las preferencias individuales (OS). Adicionalemente, no suponemos que las preferencias sean comprable entre individuos. Denominamos esto la no comparabiliada de las preferencias entre individuos (NC). Ambas hipótesis imponen reestricciones importantes en las funciones de elección social. Para ver esto, suponga que u^i, $i = 1, ...I$ son funciones de utilidad que representan las preferencias de los agentes. Definamos la la función de utilidad de la sociedad V inducida por la función de elección social f como:

$$V(x) = f(u^1, ..., u^I)(x)$$

- Vamos a considerar un axioma adicional que juega un papel importante en el desarrollo de la teoría.

Axioma 9 (Principio de indiferencia de Pareto) *Si* $u^i(x) = u^i(y)$, $i = 1, ...I$, *entonces* $V(x) = V(y)$.

Proposición 16 *Si la función de elección social satisface el axioma de alternativas irrelevantes y el principio de indiferencia de Pareto enotonces existe* $W : R^I \to R$ *such that:*

$$V(x) \geq V(y) \Leftrightarrow W(u^1(x), ..., u^I(x)) \geq W(u^1(y), ..., u^I(y))$$

satisface

- Ahora, sea $(u_1, ..., u_I)$ y $(\widetilde{u}_1, ..., \widetilde{u}_I)$ dos vectores de utilidades correspondientes a dos alternativas sociales. Entonces OS y NC implican que si:

$$W(u_1, ..., u_I) \geq W(\widetilde{u}_1, ..., \widetilde{u}_I)$$

  entonces para todo perfil de funciones ψ^i, $i = 1, ..., I$ estrictamente crecientes:

$$W(\psi^1(u_1), ..., \psi^1 (u_I)) \geq W(\psi^1 (\widetilde{u}_1), ..., \psi^1 (\widetilde{u}_I))$$

- Consideramos ahora dos hipótesis adicionales sobre la comparabilidad de la utilidad de las prferencias entre agentes son las siguientes.

Definición 30 (Comparabilidad inter e intra personal) *Decimos que existe comparabilidad completa (FC) entre individuos si la utilidad individual es comparable entre individuos. OS y FS implican que si:*

$$W(u_1, ..., u_I) \geq W(\widetilde{u}_1, ..., \widetilde{u}_I)$$

entonces para toda función ψ, *estrictamente creciente:*

$$W(\psi(u_1), ..., \psi (u_I)) \geq W(\psi (\widetilde{u}_1), ..., \psi (\widetilde{u}_I))$$

Decimos que existe comparabilidad incremental entre individuos (IC) si es posible comparar los incrementos de la utilidad entre individuos. CS e IC implican que si:

$$W(u_1, ..., u_I) \geq W(\widetilde{u}_1, ..., \widetilde{u}_I)$$

entonces para toda perfil de funciones ψ^i, $i = 1, ..., I$ *estrictamente crecientes,* $\psi^i(u) = a^i + bu$ *(b común a todas las funciones), estrictamente crecientes (*$b > 0$*):*

$$W(\psi^1(u_1), ..., \psi^I (u_I)) \geq W(\psi^1 (\widetilde{u}_1), ..., \psi^I (\widetilde{u}_I))$$

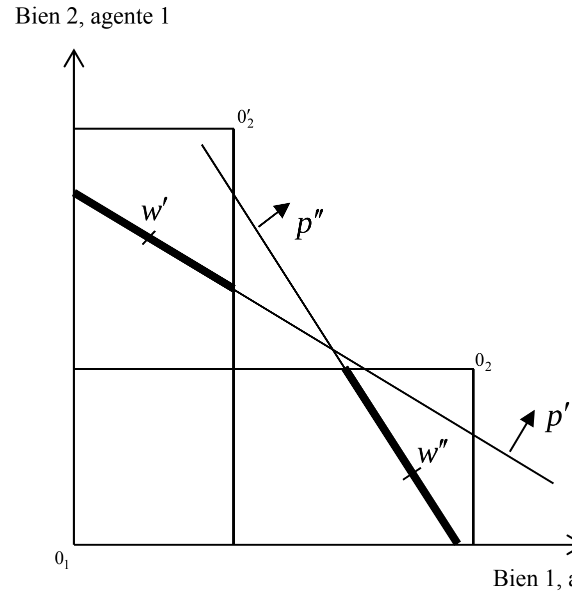
- Dos reestriciones éticas sobre la función de elección social son las que formalizan la siguiente definición.

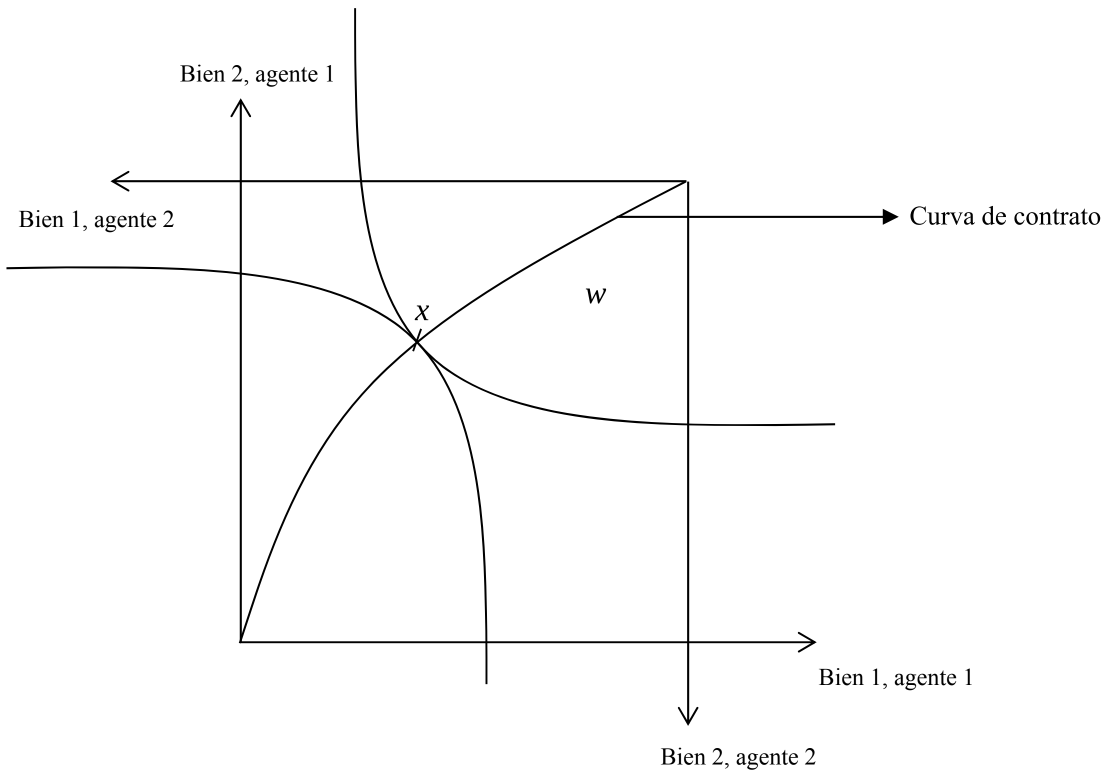
- POR COMPLETAR

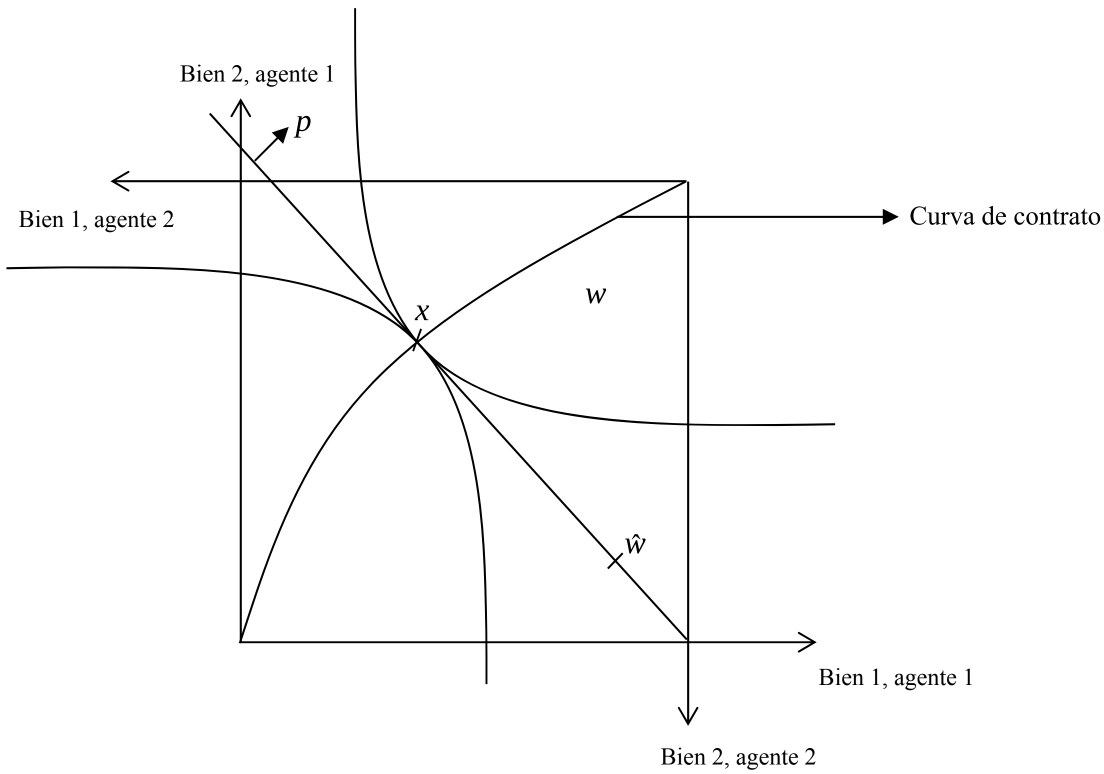
Referencias

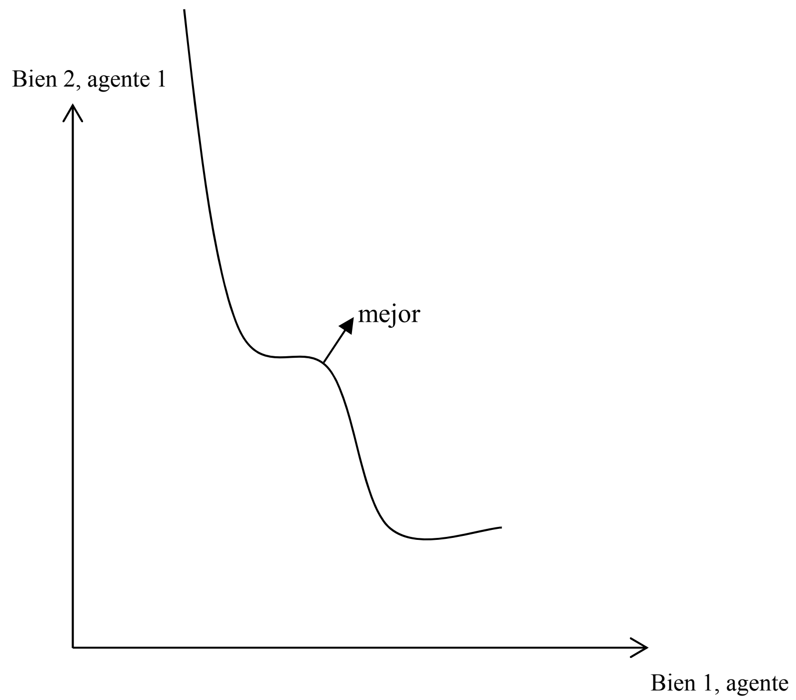
[1] Araujo, A. 2004. Itroducción a la Economía Matemática. Publicaciones Matemáticas del IMPA.

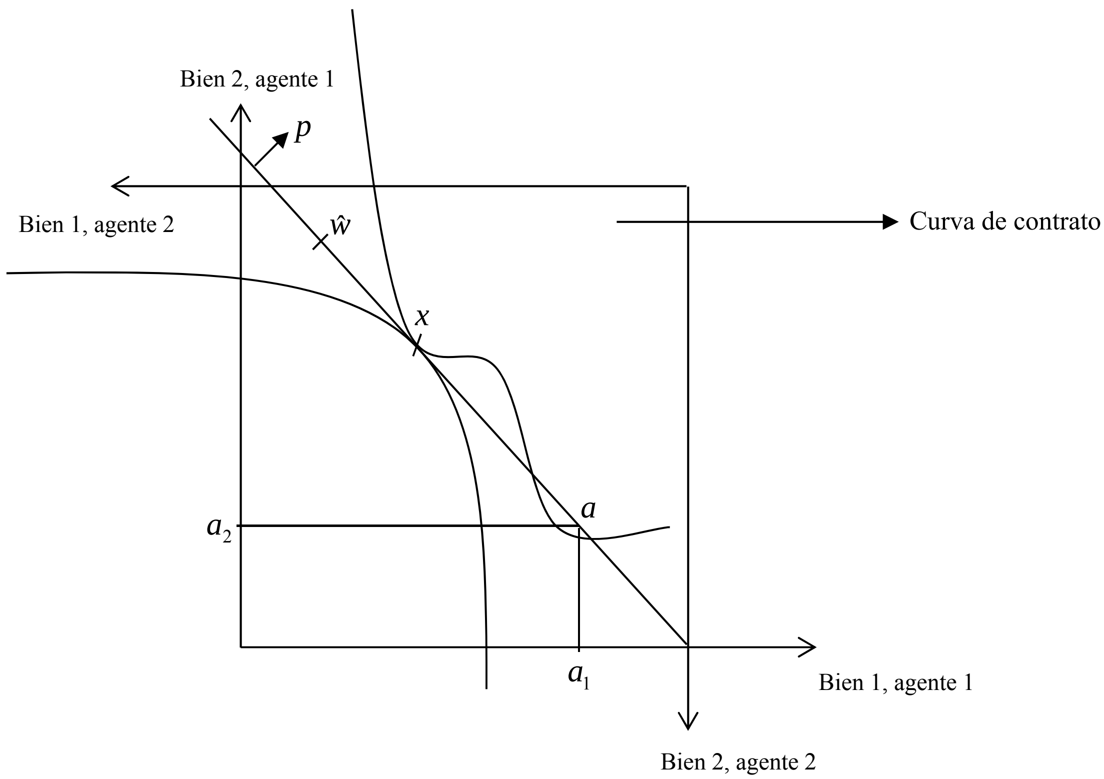
[2] Kreps, D. M. 1990. A Course in Microeconomic Theory. Princeton University Press.

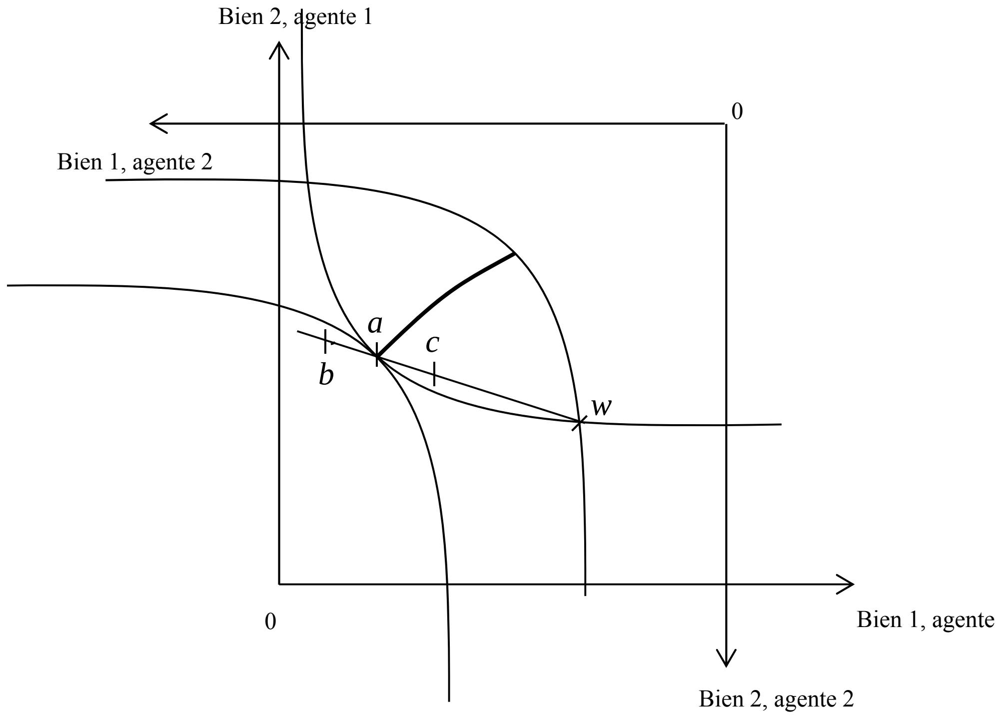

Bien 2, agente 1
$0'_2$
w'
p''
0_2
p'
w''
0_1
Bien 1, a

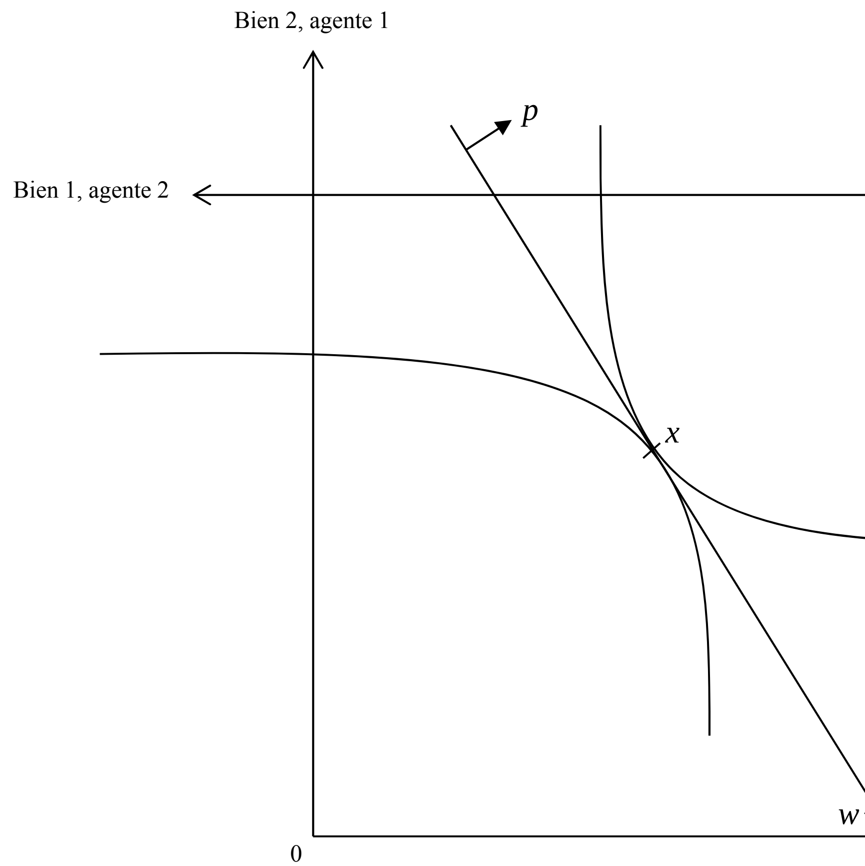

Bien 2, agente 1
Bien 1, agente 2
Curva de contrato
w
x
Bien 1, agente 1
Bien 2, agente 2

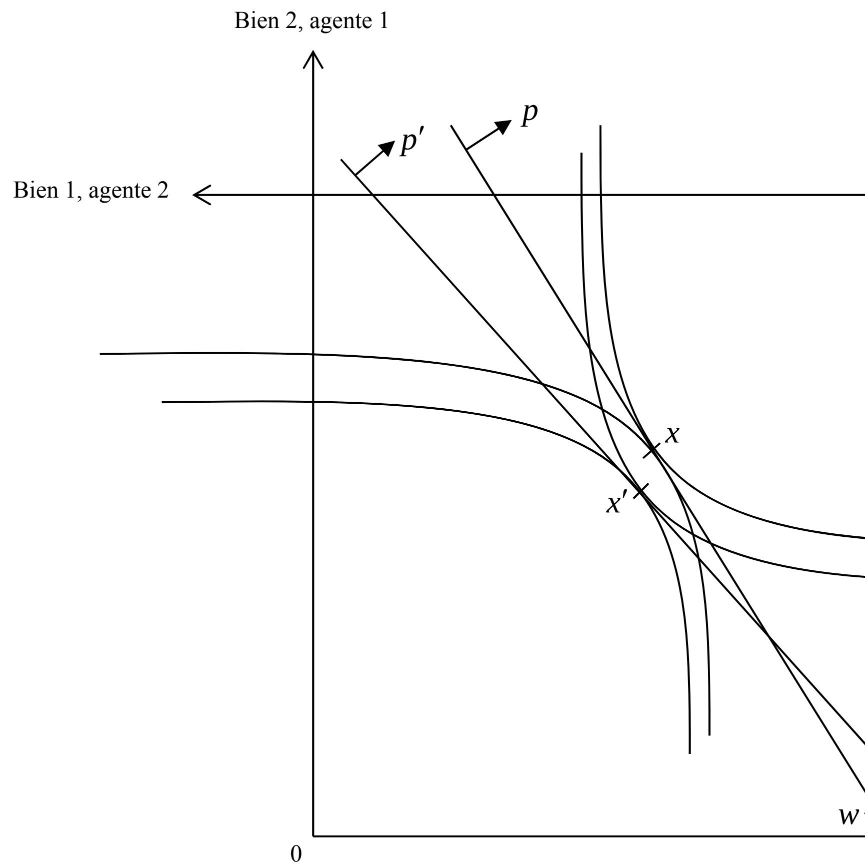

Bien 2, agente 1
p
Bien 1, agente 2
Curva de contrato
w
x
$\hat{w}$
Bien 1, agente 1
Bien 2, agente 2


Bien 2, agente 1
mejor
Bien 1, agente 1

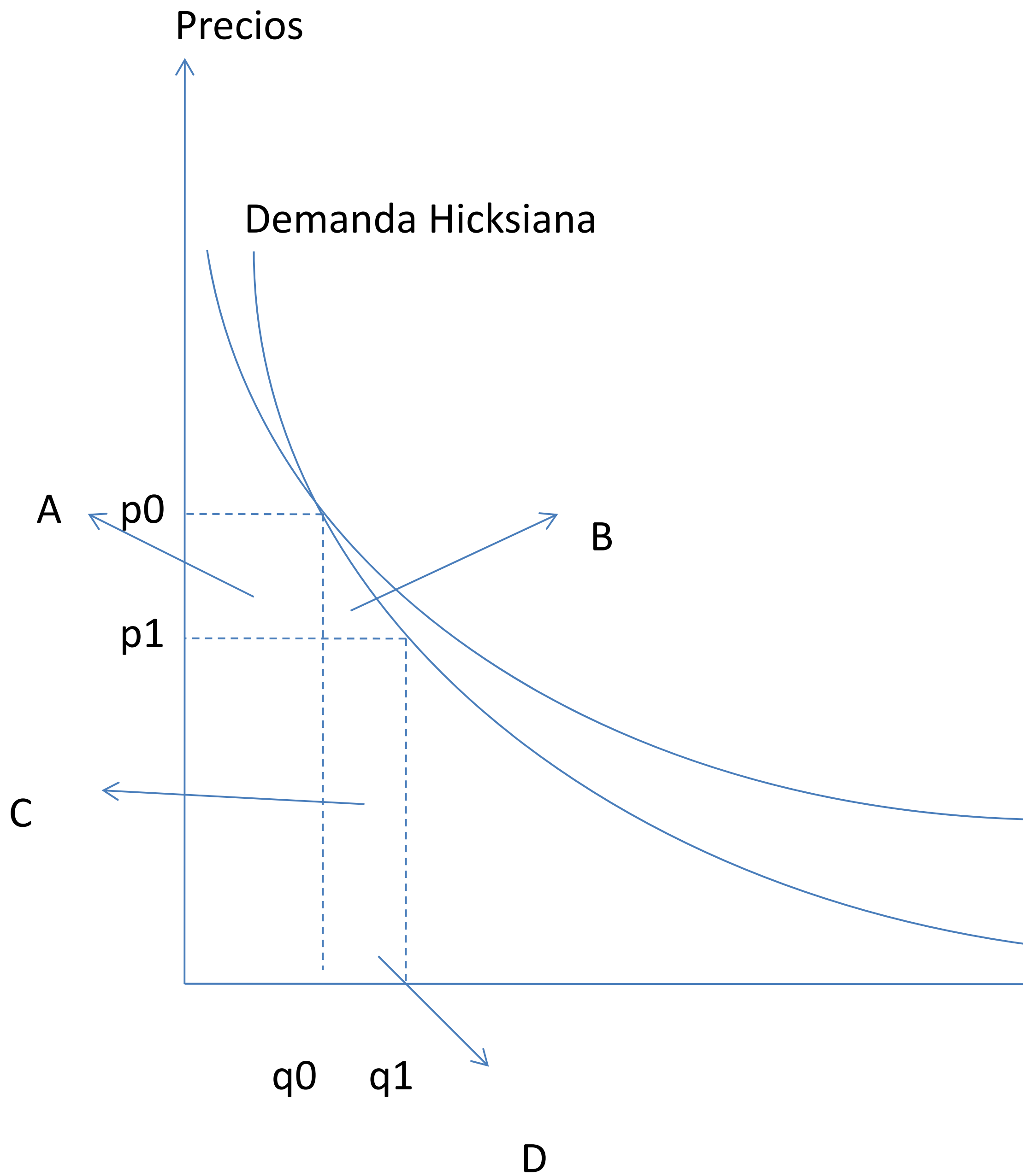

Bien 2, agente 1
p
Bien 1, agente 2
ŵ
Curva de contrato
x
a
a2
a1
Bien 1, agente 1
Bien 2, agente 2


Bien 2, agente 1
0
Bien 1, agente 2
a
c
b
w
0
Bien 1, agente 1
Bien 2, agente 2


Bien 2, agente 1
p
Bien 1, agente 2
x
w
0



Bien 2, agente 1
Bien 1, agente 2
p'
p
x
x'
0


Precios
Demanda Hicksiana
A
p0
B
p1
C
q0
q1
D