Notas de Clase: Teoría de Juegos

Estas notas son un un breve resumen. En clase se discutirán a mayor profundidad los temas y se darán mas ejemplos

Mauricio Romero*

July 15, 2013

Contents

*Estas es la primera versión de estas notas. Estas notas están basadas en varios libros y especialmente en las notas de clase de Joel Watson, Navin Kartik y de Marcela Esvala. En muchos casos estas notas no son mas que una traducción. Espero que están notas ayuden a entender el material del curso. Las notas de Marcela Eslava tienen todo el material del curso y se pueden utilizar alternativamente si el lector lo prefiere. Favor enviarme cualquier error que encuentre a mtromero@ucsd.edu

1 Introducción

La teoría de juegos estudia el comportamiento de agentes racionales en ambiente donde existe interacción estratégica. Hasta el momento ustedes han estudiado problemas donde los agentes son racionales (i.e. resuelven un problema de optimización bien definido) pero donde los agentes no creen que las acciones de otros individuos afecten los parámetros de su problema de optimización. Por ejemplo, en la teoría de equilibrio general, se supone que los agentes son precio aceptantes y resuelven

$$\max_{x} u(x)$$

s.t.

$$p \cdot x \leq p \cdot w$$

Donde x es un vector que indica una canasta de bienes, w es la dotación inicial de los agentes y p es el vector de precios. En este problema, las decisiones de compra de otros individuos no afectan los parámetros de mi problema (p y w) y por ende no existe interacción estratégica.

Definición 1 (Interacción Estratégica)**.** *Decimos que existe interacción estratégica cuando un agente tiene en cuenta como su acciones afectan a otros individuos y como las acciones de otros individuos los afectan.*

Originalmente la teoría de juegos fue desarrollada para diseñar estrategias óptimas en juegos como el póker o el ajedrez, pero permite estudiar un gran rango de situaciones que no tienen cabida dentro de los supuestos tradicionales de la microeconómica neoclásica, donde se asume que existen tantos agentes que las decisiones de un solo individuo no tienen efectos en el mercado, ni en la teoría de decisiones (”decision theory” en ingles), donde se estudia como un agente toma decisiones en un entorno donde no hay mas individuos. En particular, podremos estudiar situaciones donde hay ”pocos” agentes y por ende es posible que exista interacción estratégica entre los mismos.

1.1 Una breve historia

[1] La teoría de juegos moderna le debe mucho a John Von Neumann. En 1928, en un articulo sobre juegos de suma cero (donde la ganancia de una persona, es la perdida de otra), presento el teorema Minmax. En 1944, Oscar Morgenstern, publico el libro (hoy en día un clásico) ”Theory of Games and Strategic Behavior”, donde extendió el trabajo en juegos de suma-zero realizado por Von Neumann e introdujo la teoría de juegos cooperativa. En los 50's, John Nash realizo las contribuciones seminales a la teoría de las negociaciones y a juegos que no son de suma cero. En 1957, Robert Luce y Howard Raiffa publicaron su libro ”Games and Decisions: Introduction and Critical Survey” popularizando la teoría de juegos entre académicos de todo el mundo. En 1967–1968, John Harsanyi formalizo el estudio de juegos con información incompleta, lo que amplio, de manera significativa, el rango de aplicaciones de la teoría de juegos. En los 70's, se dio una explosión de artículos teórico y empíricos y la teoría de juegos se convirtió en una herramienta estándar, no solo en la economía sino también en otras ciencias sociales.

[1] Traducida casi literalmente de las notas de clase de Navin Kartik

2 Situaciones Estratégicas y Representación

Un juego es simplemente la descripción de una situación estratégica. Para describir un juego completamente debemos describir los siguientes elementos del mismo,

- Participantes: Los individuos que toman decisiones en el juego.
- Las reglas de juegos: Esto se puede dividir en dos grupos, las acciones disponibles a cada jugador y el orden en que se da el juego.
- La información disponible a cada jugador.
- Como los resultados del juego dependen de las acciones de los individuos.
- Como los individuos valoran los resultados del juego.

Veamos los siguientes juegos:

Ejemplo 1 (Pares o Nones)**.** *Dos jugadores, Ana y Bart, simultáneamente eligen si mostrar uno o dos dedos simultáneamente. Si la suma total de los dedos es par Bart le tiene que pagar a Ana mil pesos. Si la suma es impar, Ana le tiene que pagar a Bart mil pesos.*

Ejemplo 2 (Pares o Nones II)**.** *Dos jugadores, Ana y Bart, eligen si mostrar uno o dos dedos. Primero Ana le muestra a Bart, y una vez Bart observa cuantos dedos mostró Ana decide cuantos dedos mostrar. Si la suma total de los dedos es par Bart le tiene que pagar a Ana mil pesos. Si la suma es impar, Ana le tiene que pagar a Bart mil pesos.*

Ejemplo 3 (Pares o Nones III)**.** *Dos jugadores, Ana y Bart, eligen si mostrar uno o dos dedos. Primero Ana le muestra a Bart, y una vez Bart observa cuantos dedos mostró Ana decide cuantos dedos mostrar. Si la suma total de los dedos es par Bart le tiene que pagar a Ana mil pesos. Si la suma es impar, no pasa nada.*

Ejercicio 1. *Identifique los elementos de ambos juegos.*

2.1 Supuestos

Es importante hablar de algunos de los supuestos de la teoría de juegos en este punto. Primero, se supone que los individuos maximizan la utilidad esperada. Esto quiere decir que si existe una función de utilidad bien definida, y existe incertidumbre, un individuo maximiza usando como función objetivo la utilidad esperada. Note que este supuesto no es trivial. Ustedes han visto

que es posible representar las preferencias de los individuos (bajo supuestos bastante razonables) mediante una función de utilidad. Esta representación no es única y aun mas si $u(x)$ representa unas preferencias entonces $f(u(x))$ también lo hace siempre y cuando f se una función creciente. Note que esto no afecta el problema de optimización de los individuos pues

$$x^* = \arg \max_{x \cdot p \leq w \cdot p} u(x) = \arg \max_{x \cdot p \leq w \cdot p} f(u(x))$$

,para cualquier función f creciente. Sin embargo, si x^* resuelve

$$\max_{x \cdot p \leq w \cdot p} \mathbb{E}u(x)$$

no necesariamente resuelve

$$\max_{x \cdot p \leq w \cdot p} \mathbb{E} f(u(x))$$

. Es decir, la forma especifica que se elija de la función de utilidad tiene repercusiones importantes

sobre los resultados. Esto no sucedía en la teoría microeconómica clásica.

Ejemplo 4. *Suponga que un individuo puede comprar dos loterías. La primera le paga* 10 *con probabilidad de* 0.5 *y* 0 *con probabilidad* 0.5 *y cuesta* 5 *el tiquete de lotería. La segunda le paga* 100 *con probabilidad de* 0.5 *y* 0 *con probabilidad* 0.5 *y cuesta* 50 *pesos el tiquete. Note que la diferencia entre las dos loterías es simplemente las unidades monetarias que se utilizan. Supongamos que tenemos tres agentes con funciones de utilidad* $u^1(x) = \ln(x+1), u^2(x) = x+1, u^3(x) = e^{x+1}$. *Note*

que las tres funciones de utilidad representan las mismas preferencias. La siguiente tabla muestra la utilidad esperada de los tres agentes sobre las dos loterías.

Utilidad	Lotería 1	Lotería 2
$\mathbb{E}u^1$	$0.5\ln(11) + 0.5\ln(1) - 5 \approx -4$	$0.5\ln(101) + 0.5\ln(1) - 50 \approx -47$
$\mathbb{E}u^2$	$0.5(11) + 0.5(1) - 501 = 1$	$0.5(101) + 0.5(1) - 5,001 = 1$
$\mathbb{E}u^3$	$0.5exp(11) + 0.5exp(1) - 5 \approx 29933$	$0.5exp(101) + 0.5exp(1) - 50 \approx 3.65353 \times 10^{43}$

Table 1: Utilidad de las dos loterías baje tres funciones de utilidad que representan las mismas preferencias.

Entonces el primer agente preferiría la primera lotería, el segundo seria indiferente y el tercero preferiría la tercera lotería. Esto es problema pues los tres agentes tienen las mismas preferencias.

Ejercicio 2. *Demuestre que si* $x^* = \arg\max_{x \in \Gamma} \mathbb{E}u(x)$ *entonces* $x^* = \arg\max_{x \in \Gamma} \mathbb{E}au(x) + b$. *Esto demuestra que transformaciones afines (o lineares) de la función de utilidad siguen representando las mismas preferencias bajo incertidumbre.*

Ahora hablemos de la información disponible a cada jugador. Suponga que hay tres individuos y "Dios" pone sobre su cabeza un sombrero blanco o negro. Los tres individuos pueden ver el sombrero que tienen las otras dos personas, pero no pueden ver su propio sombrero. Todos los sombreros son blancos. Considere que el objetivo de cada individuo es adivinar si tiene un sombrero blanco o no. Los individuos van en orden diciendo si saben con certeza que su sombrero es blanco, o si "pasan". Si adivinan de manera incorrecta se mueren (lease con voz de suspenso) por ende solo responden si están 100% seguros. El juego acaba cuando alguien responde de manera correcta. Como el juego se

plantea originalmente, los individuos "pasan" infinitamente. Ahora, suponga que alguien les dice: "hay al menos un sombrero blanco". En este caso, la primera persona "pasa", la segunda persona "pasa", la tercera persona responde "Blanco".

Ejercicio 3. *Por que la tercera persona puede decir con certeza que su sombrero es blanco?*

La diferencia entre estas dos situaciones es muy sutil. Note que la información todos los individuos sabían previamente que había un sombrero blanco (es mas sabían que había dos), y sabían que los demás sabían que había al menos un sombrero blanco. La diferencia es que ahora todos saben, que todos saben, que hay al menos un sombrero blanco. Este no era el caso antes. Piense en esto. Es difícil notar la diferencia[2]. Este ejemplo resalta la diferencia entre información mutua (*mutual knowledge*) e información común. Se dice que Y es información mutua si todos los jugadores conocen Y pero no necesariamente saben que otros también conocen Y. Se dice que Y es información común (*common knowledge*) , si todos los jugadores conocen Y y saben que todos conocen Y, y todos saben que todos conocen Y, y todos saben que todos saben que todos saben que conocen Y, ad infinitum. Nosotros vamos a suponer siempre que todos los elementos del juego, excepto tal vez las funciones de utilidad (u objetivos de los individuos) son información común. También suponen que cada individuo conoce su propia función de utilidad (u objetivos). Un juego donde toda la información incluyendo los pagos de los individuos es información común se dice de información completa. Un juego donde existe incertidumbre sobre las funciones objetivo de los otros individuos se dice de información incompleta.

2.2 Notación

Durante el curso utilizaremos la siguiente notación a menos que se indique lo contrario.

- Los participantes serán denotados con el índice i, donde $i = 1, .., N$ y tenemos N jugadores.
- Denotamos por A_i el espacio de acciones disponibles a un individuo. $a_i \in A_i$ es una acción.
- Suponga que tenemos un vector $a = (a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_N)$, utilizaremos la siguiente notación $a_{-i} := (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ y $a = (a_i, a_{i-1})$.
- Denotamos por S_i el espacio de estrategias disponibles a un individuo. $s_i \in A_i$ es una estrategia. Una estrategia es un plan completo de acción.
- Denotamos por u^i la utilidad del agente i, note que $u_i(s_1, s_{-i})$, es decir que la utilidad del individuo i no solo depende de la estrategia que el siga.

2.3 Estrategias Vs Acciones

Aquí vale la pena hablar sobre la diferencia entre estrategias y acciones. Volvamos al ejemplo de pares y nones III. Las acciones para ambos individuos son $A_i = \{1, 2\}$, es decir mostrar uno o dos dedos. Una estrategia para Ana es una acción. Es decir $S_{ana} = A_{ana}$. Sin embargo, una estrategia para Bart es una acción para cada posible contingencia del juego. Es decir una estrategia para Bart determina una acción si *Ana* saca un dedo y otra si saca dos. Es decir $S_{Bart} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ donde la primera coordenada determina la acción que Bart realiza si Ana muestra un dedos y la segunda la acción que Bart realiza si Ana muestra dos dedos. La diferencia entre estrategias y acciones es **muy** importante. Si Ana cree que a Bart no le importa la plata sino quedar bien con ella, entonces pensara que la estrategia que Bart va a seguir es $1, 2$ para que asi Ana siempre gane. Entonces *Ana* jugaría cualquier cosa. Si Ana cree que Bart no

[2]En este libro http://classes.maxwell.syr.edu/ecn611/Geanakoplos2.pdf en la pagina 1438-1440 se encuentra un ejemplo explicado en mayor detalle

entendió el juego y que este siempre va a mostrar un dedo (i.e seguirá la estrategia $(1,1)$) entonces Ana jugara 1. Si Ana cree que Bart no entendió y jugara $(2,2)$ siempre, entonces ella jugara 2. Es decir lo que Ana crea que Bart va a hacer en cada posible contingencia es importante. Por esto, siempre debemos pensar en términos de estrategias y no de acciones. Otra manera de pensar en

esto es la siguiente. Supongamos que le explicamos a Ana y a Bart el juego y les decimos que ellos en realidad le tienen que dar instrucciones a un computador para que juegue por ellos. Ana solo le puede decir al computador que juegue 1 o 2. Pero Bart le puede decir al computador que juegue 1 o 2 dependiendo de lo que Ana juegue. Por esto, las estrategias de Bart son duplas.

2.4 Representación Normal o Estratégica

Durante el curso utilizaremos dos formas de representar juegos. Estos son simplemente formas de esquematizar un juego y facilitan el análisis. La primera forma es la representación normal. La representación normal consiste de

- Lista de los jugadores.
- Espacio de estrategias.
- Funciones de pago.

Ejercicio 4. *La representación normal no menciona las reglas de juego ni la información disponible. Donde se encuentran "escondidos" estos elementos?*

Cuando existen pocos jugadores (dos o tres) se utiliza una matriz de pagos para representar el juego. La siguiente figura presenta un ejemplo.

	s_1	s_1'	s_1''
s_2	$(u_1(s_1,s_2),u_2(s_1,s_2))$	$(u_1(s_1',s_2),u_2(s_1',s_2))$	$(u_1(s_1'',s_2),u_2(s_1'',s_2))$
s_2'	$(u_1(s_1,s_2'),u_2(s_1,s_2'))$	$(u_1(s_1',s_2'),u_2(s_1',s_2'))$	$(u_1(s_1'',s_2''),u_2(s_1'',s_2''))$

Table 2: Representación de un juego en forma normal donde el primer jugador tiene tres estrategias disponibles y el segundo tiene dos.

A continuación esta la representación en forma normal de pares y nones I y pares y nones II, donde las estrategias de Ana están en las filas y las de Bart en las columnas.

	1_B	2_B
1_A	(1000,-1000)	(-1000,1000)
2_A	(-1000,1000)	(1000,-1000)

Table 3: Pares y Nones I

	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
1_A	(1000,-1000)	(1000,-1000)	(-1000,1000)	(-1000,1000)
2_A	(-1000,1000)	(-1000,1000)	(1000,-1000)	(1000,-1000)

Table 4: Pares y Nones II

Note que los pagos en cada caso corresponden a las acciones asociadas con las estrategias correspondientes.

2.5 Representación extensiva

Esta es tal vez la forma más natural de representar un juego, pero no siempre es la más útil. Joel Sobel, un profesor muy famoso en el mundo de la teoría de juegos, una vez me dijo que la forma extensiva era para mentes "débiles" y que la forma normal era suficiente para analizar cualquier juego. Yo estoy lejos de ser tan brillante como Joel y por ende utilizare la "muletilla" mental de la forma extensiva. Espero que sea útil para ustedes también. Para representar un juego en forma extensiva se necesita:

- Lista de los jugadores.
- Información disponible a cada jugador en cada momento del juego.
- Acciones disponibles a cada jugador en cada momento del juego.
- Funciones de pago.

Normalmente uno realiza una representación visual que se llama el "árbol del juego". Cada punto donde empieza una rama es un "nodo de decisión", donde un jugador tiene que realizar una acción. Si dos nodos están conectados por líneas punteadas están en un mismo conjunto de información, donde el jugador que tiene el turno no puede diferenciar entre un nodo y el otro (es decir no sabe con certeza en cuál de los dos está). Las siguientes figuras representan los juegos Pares o Nones I

y Pares o Nones II en forma extensiva.

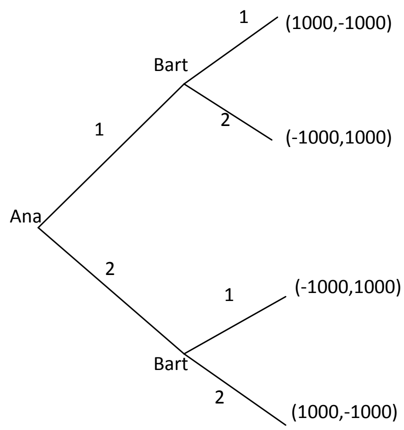


Figure 1: Pares o Nones I

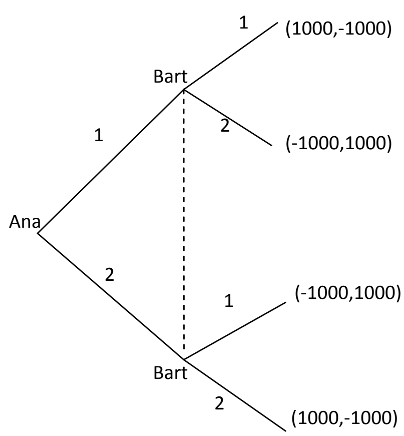


Figure 2: Pares o Nones II

2.6 Comentarios importantes

Aquí voy a presentar algunos resultados sin sus pruebas pues estas son algo técnicas y poco relevantes para la mayoría de ustedes. Las personas interesadas me pueden buscar y con gusto les daré referencias donde pueden encontrar las pruebas. Todo juego se puede representar de ambas formas.

La representación no alterara el resultado de nuestros análisis, pero es mas sencillo realizar algunos análisis utilizando una forma u la otra. Es posible que una forma normal tenga varias formas extensivas equivalentes, sin embargo los resultados de nuestros analizas serán invariantes a esto. Ambas representaciones puede ser simbólicas, pero la representación simbólica es engorrosa y en general solo es útil para realizar demostraciones teóricas. La representación visual, bien sea por medio de la matriz de pagos o del árbol del juego, es suficiente para los propósitos de este curso.

2.7 Ejemplos

Ejemplo 5 (Juego del Cienpies)**.** *Suponga que hay dos individuos Ana y Bart. A Ana se le da un chocolate. Ella puede parar el juego y quedarse con el chocolate o puede continuar. En ese caso se le quita el chocolate a Ana y se le dan dos a Bart. Aquí Bart puede parar el juego y quedarse con dos chocolates (y Ana con cero) o puede continuar. Si continua, se le quita un chocolate y se le dan cuatro a Ana. Ana puede parar el juego y quedarse con 4 chocolates (y Bart con uno), o puede continuar, en cuyo caso el juego acaba con tres chocolates para cada uno. La representación extensiva de este juego es:*

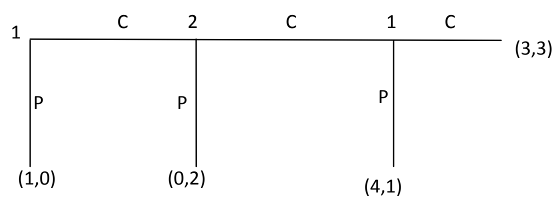


Figure 3: Juego Cienpies en forma extensiva

La representación en formal normal es:

	C	P
C,C	3,3	0,2
C,P	4,1	0,2
P,C	1,0	1,0
P,P	1,0	1,0

Table 5: Juego Cienpies en forma normal o estratégica

Ejemplo 6. *Considere el siguiente juego en forma extensiva:*

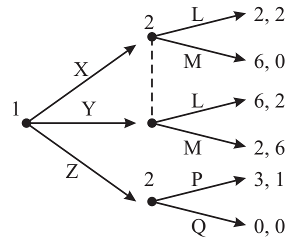


Figure 4: Tomada de las notas de clase de Joel Watson.

Su representación en forma normal o estratégica es:

1 \ 2	LP	LQ	MP	MQ
X	2, 2	2, 2	6, 0	6, 0
Y	6, 2	6, 2	2, 6	2, 6
Z	3, 1	0, 0	3, 1	0, 0

Figure 5: Tomada de las notas de clase de Joel Watson.

Ejercicio 5. *Considere el siguiente juego en forma extensiva:*

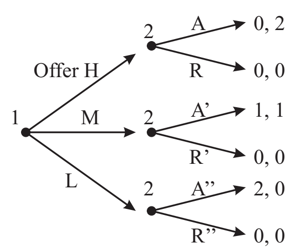


Figure 6: Tomada de las notas de clase de Joel Watson.

Escriba la forma normal.

Ejercicio 6. *Escriba dos formas extensivas equivalentes a la siguiente forma normal:*

1 \ 2	LP	LQ	MP	MQ
X	2, 2	2, 2	6, 0	6, 0
Y	6, 2	6, 2	2, 6	2, 6
Z	3, 1	0, 0	3, 1	0, 0

Figure 7: Tomada de las notas de clase de Joel Watson.

2.8 Que viene...

Uno quisiera saber cómo la gente se va a comportar en situaciones estratégicas. Esta pregunta es mucho más difícil de lo que parece a primera vista. Es por eso, que los conceptos que se han desarrollados no pretender predecir como jugaran los individuos en una situación estratégica ni como se desarrollara el juego. Los conceptos de solución buscaran situaciones "estables". Es decir, estrategias donde ningún individuo tenga incentivos a desviarse o a realizar algo diferente, dado lo que hacen los demás. Esto es un concepto equivalente al de equilibrio general, donde dado unos precios de mercado, todo el mundo está optimizando, los mercados se vacían, y por ende nadie tiene incentivos a desviarse.

3 Juegos estáticos de información completa

En esta sección discutiremos juegos estáticos donde todos los jugadores mueven simultáneamente y solo una vez. Note, que una situación donde los jugadores mueven secuencialmente, pero no pueden observar lo que jugaron otras personas, se puede modelar como un juego estático. Por ahora solo consideraremos juegos de información completa, es decir que todos los jugadores conocen las funciones objetivos de sus contrincantes. Sin duda alguna, estas son condiciones muy restrictivas pero nos permitirán presentar conceptos muy importantes que serán fáciles de extender a juegos más complejos. En esta sección utilizaremos la forma normal casi siempre. Note que cada jugador solo tiene una contingencia para decidir y por ende las estrategias son idénticas a las acciones.

3.1 Dominación

Es intuitivo pensar que si una estrategia s_i siempre resulta en una mayor utilidad, independientemente de la estrategia que sigan los otros jugadores, que la estrategia s_i', entonces s_i' nunca era elegida por el individuo i. En lenguaje técnico:

Definición 2 (dominación)**.** *s_i **domina** a s_i' si $u(s_i, s_{-i}) > u(s_i', s_{-i})$ $\forall s_{-i} \in S_{-i}$. Es decir si jugar s_i siempre es **estrictamente** mejor.*

Este concepto ayuda a solucionar juegos, pues uno si existe una estrategia s_i que domine a toda las demás estrategias para el jugador i, entonces es de esperar que en cualquier concepto de equilibrio, esta sea la estrategia resultante para el jugador i. Considere el siguiente ejemplo:

	C	NC
C	5,5	0,10
NC	10,0	2,2

Table 6: Dilema de los prisioneros

En este caso C representa cooperar y NC no cooperar. Note que NC domina a C para ambos individuos y por ende uno esperaría que el resultado del juego sea que ambos individuos jueguen NC. Esto resultaría en uno pago de 2 unidades para cada individuo. Note que si ambos jugaran C tendrían cinco unidades. Esto es un resultado importante de la teoría de juegos. En situaciones estratégicas la maximización de la utilidad individual puede no llevar a óptimos de Pareto. Compare este resultado con el primer teorema de la economía del bienestar.

Ejercicio 7. *Es el dilema de los prisioneros un contraejemplo al primer teorema de la economía del bienestar? La respuesta es no, pero piense por que no lo es.*

Ahora considere el siguiente juego

	a	b	c
A	5, 5	0, 10	3, 4
B	3, 0	2, 2	4, 5

Table 7:

Note que el jugador uno no tiene ninguna estrategia dominada, pero b domina a a para el jugador dos. Esto implicaría que el jugador dos nunca jugaría a. El jugador uno se daría cuenta de esto y por ende nunca esperaría que el jugador dos juegue a y por ende la "eliminaría" del juego. Esto resultaría en el juego:

	b	c
A	0, 10	3, 4
B	2, 2	4, 5

Table 8:

Entonces A es dominado por B en este contexto para el jugador 1. El jugador dos, sabiendo que el jugador uno es racional y que el se dio cuenta que ella nunca jugaría a, entonces elimina A del juego pues sabe que el jugador uno nunca la jugaría.

	b	c
B	2, 2	4, 5

Table 9:

Entonces el jugador dos jugaría c y el jugador uno jugaría B. Hemos llegado a una "solución" del juego donde las estrategias que siguen los jugadores son (B, c). Este tipo de solución se conoce como "eliminación iterativa de estrategias dominadas". Es importante anotar que la solución es una pareja de estrategias, una para cada individuo, y no los pagos asociados con ella (4,5).

Definición 3 (soluble por medio de dominación)**.** *Se dice que un juego es soluble por medio de* ***eliminación iterativa de estrategias dominadas*** *si el resultado de la iteración es un único perfil de estrategias (una para cada jugador).*

Este concepto de solución se basa en dos supuestos claves. Primero, nadie juega una estrategia estrictamente dominada (es decir que los agentes son racionales). Segundo, todo el mundo confía en la racionalidad de los demás para que no jueguen estrategias estrictamente dominadas (es decir, el supuesto de la racionalidad de los agentes es *información común*). Una pregunta importante en

este punto, es si el orden de eliminación de las estrategias es importante. La respuesta es no. No voy a probar ese resultado, van a tener que confiar en mí. Si alguien está interesado en ver una prueba por favor dígame saber para darle referencias adecuadas. No todos los juegos son solubles

por medio de dominación. Considere la batalla de los sexos. Usted y su enamorad@ (como dirían en ecuador). Usted quiere ir a jugar golfito (G) y su enamorada@ quiere ir a caminar por el parque (P). Lo mas importante para ustedes es estar juntos, así que cada uno recibe 1 felici-punto si están juntos, y otro punto adicional si se hace lo que esa persona prefiere. Si no se ponen de acuerdo, ambos reciben cero felici-puntos. La siguiente figura representa esta situación.

	G	P
G	2,1	0,0
P	0,0	1,2

Table 10: Batalla de los sexos

Note que ninguna estrategia domina a otra en este juego, por lo cual este juego no es soluble por medio de dominación.

Ejemplo 7. *Considere el siguiente juego entre 100 personas. Cada individuo selecciona un numero,* s_i*, entre 20 y 60. Sea* a_{-i} *el promedio del numero seleccionada por las otras 99 personas. i.e.* $a_{-i} = \sum_{j \neq i} \frac{s_j}{99}$*. La función de utilidad del individuo i es* $u_i(s_i, s_{-i}) = 100 - (s_i - \frac{3}{2}a_{-i})^2$*. Dada esta situación cada individuo maximiza su utilidad, donde las condiciones de primer orden es,*

$$-2(s_i - \frac{3}{2}a_{-i}) = 0$$

y por ende los individuos preferirían seleccionar un numero que sea exactamente igual a 1.5 *veces el promedio de los demás, es decir* $s_i = \frac{3}{2}a_{-i}$*. Note que* $a_{-i} \in [20, 60]$ *y por ende* $s_i = 20$ *es dominado por* $s_i = 30$*. Es decir, sin importar lo que hagan los demás,* $s_i = 30$ *siempre me da mayor utilidad. (Haga una gráfica para convencerse de esto). Lo mismo ocurre con cualquier numero entre 20 (inclusive) y 30 (sin incluir). Por ende, jugar un número entre 20 y 30 (sin incluir) es estrictamente dominado. Sabiendo esto, todos los individuos creen que todos los demás* *van a seleccionar número entre 30 y 60. Siguiendo una lógica parecida a la anterior, jugar un número entre 30 y 45 (sin incluir) seria estrictamente dominado por jugar 45. Esto implicaría que todos los jugadores esperarían que todos los demás jueguen un número entre 45 y 60. Siguiendo una lógica idéntica a la anterior 60 dominaría cualquier otra selección y por ende todos los jugadores seleccionan 60. Esto implicaría que la solución por medio de eliminación iterada de estrategias dominadas es* $\underbrace{(60, 60, ..., 60)}_{\text{100 veces}}$

3.1.1 Estrategias débilmente dominadas

Considere el siguiente ejemplo

	a	b
A	3, 4	4, 3
B	5, 3	3, 5
C	5, 3	4, 3

Table 11: Un ejemplo con una estrategia débilmente dominada.

Note que no existe ninguna estrategia estrictamente dominada. Sin embargo, C siempre le da al menos la misma utilidad al jugador 1 que B. Uno podría pensar que entonces el jugador 1 nunca jugaría C. Sin embargo, si el jugador 1 está seguro (súper segurísimo) que el jugador dos va a jugar a el sería completamente indiferente entre jugar B o C.

Definición 4 (dominación débil)**.** *s_i **domina debilemente** a s'_i si $u(s_i, s_{-i}) \geq u(s'_i, s_{-i})$ $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ y existe al menos una estrategia s'_{-i} tal que $u(s_i, s'_{-i}) > u(s'_i, s'_{-i})$. Es decir si jugar s_i siempre es mejor y en algún caso es estrictamente mejor.*

Dados los supuestos que tenemos no podemos eliminar una estrategia débilmente dominada. Racionalidad no es suficiente por lo que se explico anteriormente. Aun así, suena "lógico" hacerlo y tiene el potencial de simplificar un juego enormemente. Sin embargo, hay un problema, y es que el orden en que eliminemos las estrategias importa. Considere el juego presentado en la tabla 3.1.1. Si eliminamos B pues C la domina débilmente, entonces a domina débilmente a b y podemos eliminarla y por ende el jugador 1 nunca jugaría A. Esto conlleva al resultado (C,a). Si por otro lado, notamos que A también es débilmente dominada por C entonces podemos eliminarla en la primera ronda, y esto haría que eliminemos a a en la segunda ronda y por ende B seria eliminada. Esto resultaría en (C, b).

3.2 Equilibrio de Nash

Recuerde la definición de equilibrio competitivo en una economía de mercado.

Definición 5. *un equilibrio competitivo en una economía de mercado es un vector de precios y unas canastas x_i tal que: 1) x_i maximiza la utilidad de cada individuo dado el vector de precios i.e.*

$$x_i = \arg \max_{p \cdot x_i \leq p \cdot w_i} u(x_i)$$

2) los mercados se vacían.

$$\sum_i x_i = \sum_i w_i$$

El numeral 1 quiere decir que dados los precios, los individuos no tienen incentivos a demandar una cantidad diferente. Es decir, no hay incentivos unilaterales a desviarse. La idea es extender este concepto a situaciones estratégicas. Para esto debemos primer definir algunos conceptos.

Definición 6 (Mejor Respuesta)**.** *Denotamos por $MR_i(s_{-i})$ (Mejor respuesta) como el conjunto de estrategias del individuo i que maximizan su utilidad dado que los demás individuos siguen el perfil de estrategias s_{-i}. En términos formales.*

$$MR_i(s_{-i}) = \{s_i | u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i =, s_{-i}) \forall s'_i \in S_i\}$$

Ahora estamos listos para definir un equilibrio de Nash

Definición 7 (Equilibrio de Nash)**.** *s^* es un equilibrio de Nash si todo los individuos están jugando su mejor respuesta a la estrategia de los demás. Es decir si*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \forall s_i \in S_i$$

para todo i

Note que esta definición es análoga a la de un equilibrio competitivo en el sentido de que nadie tiene incentivos unilaterales a desviarse. Note que este es un concepto de estabilidad, pero no existe ninguna manera de asegurar, ni de predecir, que el juego llegara a este equilibrio. Simplemente indica, que una vez se llega a este equilibrio, nadie tiene incentivos a moverse de ahí. El resto de este capítulo seguiremos las notas de clase de Marcela Eslava. Tenga en cuenta que la función de reacción de Marcela es simplemente $MR_i(s_{-i})$ en nuestra notación.

3.2.1 Ejemplos

Ejemplo 8. *Considere el juego del ejemplo 7 con solo dos jugadores. Entonces la utilidad de cada individuo está dada por $u_i = 100 - (s_i - \frac{3}{2}s_{-i})^2$. Note que la mejor respuesta de un jugador i a lo que hacen los demás individuos es:*

$$s_i(s_{-i})^* = \begin{cases} \frac{3}{2}s_{-i}) & si\ s_{-i} \leq 40 \\ 60 & si\ s_{-i} > 40 \end{cases}$$

Note que el equilibrio de Nash se da donde las función de respuesta se intersecan. Es decir cuando ambos jugadores juegan 60.

Ejemplo 9 (Dilema de los prisioneros)**.** *Recuerde*

	C	NC
C	5,5	0,10
NC	10,0	2,2

Table 12: Dilema de los prisioneros

Note que las funciones de mejor respuesta son

$$MR_i(s_{-i}) = \begin{cases} NC & si\ s_i = C \\ NC & si\ s_i = NC \end{cases}$$

Por ende (NC, NC) es un equilibrio de Nash.

	G	P
G	2,1	0,0
P	0,0	1,2

Table 13: Batalla de los sexos

Ejemplo 10 (Batalla de los Sexos)**.** *Note que las funciones de mejor respuesta son*

$$MR_i(s_{-i}) = \begin{cases} G & si\ s_i = G \\ P & si\ s_i = P \end{cases}$$

Por ende (G, G) y (P, P) son ambos Equilibrios de Nash.

Ejemplo 11 (Pares o Nones I)**.**

	1	2
1	(1000,-1000)	(-1000,1000)
2	(-1000,1000)	(1000,-1000)

Table 14: Pares y Nones I

Note que las funciones de mejor respuesta son

$$MR_1(s_2) = \begin{cases} 1 & si\ s_2 = 1 \\ 2 & si\ s_2 = 2 \end{cases}$$

$$MR_2(s_1) = \begin{cases} 2 & si\ s_1 = 1 \\ 1 & si\ s_2 = 2 \end{cases}$$

Por ende no existe ningún perfil de estrategias que sea un equilibrio de Nash en estrategias puras.

3.3 Relación entre dominación y equilibrio de Nash

Aquí voy a probar los dos teoremas que están en la sección 2.2 de las notas de clase de Marcela Eslava. Supongo que algunos se preguntaran por que vamos a cubrir estas demostraciones. La principal razón es para que practiquen sus habilidades de lógica. Entender demostraciones formales y ser capaz de realizar demostraciones son ejercicios que desarrollan la lógica. Siento que debería escribir algo más acá, pero me parece que esa debería ser razón suficiente.

Teorema 1. *Todo equilibrio de Nash sobrevive a la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.*

Proof. Suponga que no es así. Entonces eliminamos s^* un equilibrio de Nash. Miremos la ronda en la que se elimina una estrategia que hace parte del equilibrio de Nash y que es la estrategia del individuo i (sin pérdida de generalidad). Esto quiere decir que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i}) \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

. En particular tenemos que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}*) < u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Esto quiere decir que s_i^* no es una mejor respuesta para el individuo i dado s_{-i}^*, lo cual es una contradicción. □

Teorema 2. *Si el proceso de eliminación de estrategias estrictamente dominadas llega a una solución única, esa solución es un Equilibrio de Nash y es único.*

Proof. Primero probemos que es un equilibrio de Nash. Una vez probemos esto, que sea único es trivial por el teorema anterior. Suponga que el resultado de la eliminación de estrategias estrictamente dominadas, denotado por s^* no es un equilibrio de Nash. Esto quiere decir que para algún individuo, i, existe s_i tal que

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$$

Pero entonces s_i no se podría haber eliminado, lo cual da una contradicción. □

3.4 Estrategias Mixtas

Considere el juego Cachipun (o Piedra-Papel y Tijera)

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0,0	-1,1	1,-1
Papel	1,-1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1,-1	0,0

Table 15: Cachipun

Este es un juego de azar completamente (Pares o Nones) también lo es. Cualquiera sea la estrategia que uno elija la probabilidad de ganar es la misma, y uno en general espera que la otra persona juegue cualquiera de las tres opciones con la misma probabilidad dado esto. Es decir el equilibrio que uno observa en este juego es jugar aleatoriamente con probabilidad 1/3 cualquiera de las tres opciones. Sería deseable que el concepto de equilibrio de Nash reflejo esto. Es necesario entonces

definir una estrategia mixta

Definición 8. *Si $S_i = \{s_i^1, ..., s_i^k\}$. Decimos que $\sigma_i = (p_1, p_2, ..., p_k)$ es una estrategia mixta que asigna probabilidad p_j a la estrategia s_i^j siempre y cuando $\sum p_j = 1$ y $p_j > 0$.*

Note que la estrategia pura s_i^j es igual a la estrategia mixta $s_i^1 = (1, 0, ..., , 0)$. Aquí es donde se empieza a utilizar el supuesto de maximización de la utilidad esperada fuertemente. Por ejemplo, suponga que yo creo que mi contrincante juega Cahipun utilizando una estrategia mixta donde juega papel o tijera con probabilidad de un medio (nunca juega piedra). Entonces la utilidad esperada de jugar piedra es

$$E(U_i(Piedra, \sigma_{-i})) = -1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 0$$

Ahora, supongamos que yo también decido jugar una estrategia mixta, donde la probabilidad de jugar Piedra o Tijera es un medio. Denote esta estrategia por σ_i, entonces mi utilidad esperada es

$$E(U_i(\sigma, \sigma_{-i})) = \underbrace{-1\frac{1}{4}}_{\text{piedra vs papel}} + \underbrace{-1\frac{1}{4}}_{\text{piedra vs tiejra}} + \underbrace{1\frac{1}{4}}_{\text{tijera vs papel}} + \underbrace{0\frac{1}{4}}_{\text{tijera vs tijera}} = -\frac{1}{4}$$

Entonces podemos extender el concepto de equilibrio de Nash a uno que incluya estrategias mixtas. Para esto definamos por ΔS_i el conjunto de estrategias mixtas del individuo i.

Definición 9 (Equilibrio de Nash en estrategias mixtas)**.** *σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas si*

$$\mathbb{E}u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mathbb{E}u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \forall \sigma_i \in \Delta S_i$$

para todo i

Adicionalmente, podemos extender el concepto de dominación a estrategias mixtas.

Definición 10 (dominación en estrategias mixtas)**.** *σ_i **domina** a s_i' si $\mathbb{E}u(\sigma_i, s_{-i}) > \mathbb{E}u(s_i', s_{-i})$ $\forall s_{-i} \in S_{-i}$. Es decir si jugar σ_i siempre es **estrictamente** mejor.*

Esta es el concepto final de dominación que utilizaremos. Los resultados que relacionan Equilibrios de Nash con dominación en estrategias puras, se extienden a una relación entre equilibrios de Nash en estrategias mixtas y dominación en estrategias mixtas. Para el resto de esta sección vamos a

seguir las notas de Marcela Eslava.

3.4.1 Ejemplos

Ejemplo 12. *Considere el siguiente juego*

Table 16:

	E	F	G
A	5, 10	5, 3	3, 4
B	1, 4	7, 2	7, 6
C	4, 2	8, 4	3, 8
D	2, 4	1, 3	8, 4

Primero calculemos la mejor respuesta del individuo 2 a la estrategia mixta $\sigma_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6})$. Note que:

$$\mathbb{E}U(E, \theta_1) = 10\frac{1}{3} + 4\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{6} = 5.5$$

$$\mathbb{E}U(F,\theta_1) = 3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4} + 3\frac{1}{6} = 3$$
$$\mathbb{E}U(G,\theta_1) = 4\frac{1}{3} + 6\frac{1}{4} + 8\frac{1}{4} + 4\frac{1}{6} = 5.5$$

Entonces

$$MR_2(\theta_1) = \{(p, 0, 1-p), p \in [0,1]\}$$

Para calcular el equilibrio de Nash, primero note que G domina a F (jugador 2). Entonces tenemos que D domina a B (para el jugador 1).

Table 17: Juego Reducido

	E	G
A	5, 10	3, 4
C	4, 2	3, 8
D	2, 4	8, 4

Denote por $\sigma_1 = (p, 0, 1-p)$ con $p > \frac{2}{3}$. Esta estrategia mixta domina C pues $\mathbb{E}U(\sigma_1, E) = 5p + 2(1-p) = 3p + 2$ y $\mathbb{E}U(\sigma_1, G) = 3p + 8(1-p) = 8 - 3p$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U(\sigma_1, E) &> U(C, E) \\ 3p + 2 &> 4 \\ p &> \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U(\sigma_1, G) &> \mathbb{E}U(C, G) \\ 8 - 3p &> 3 \\ p &< \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Por ende podemos reducir el juego a:

Table 18: Juego reducido

	E	G
A	5, 10	3, 4
D	2, 4	8, 4

Para encontrar el equilibrio de Nash tenemos que mirar las mejores respuestas. Recuerde que los equilibrios de Nash sobreviven a la eliminación de estrategias estrictamente dominadas, entonces solamente es necesario considerar el juego reducido. Encontremos la mejor respuesta del individuo 1 a la estrategia: $\theta_2 = (q, 1-q)$. Entonces tenemos que $\mathbb{E}U(A, \theta_2) = 5q + 3(1-q) = 2q + 3$ y

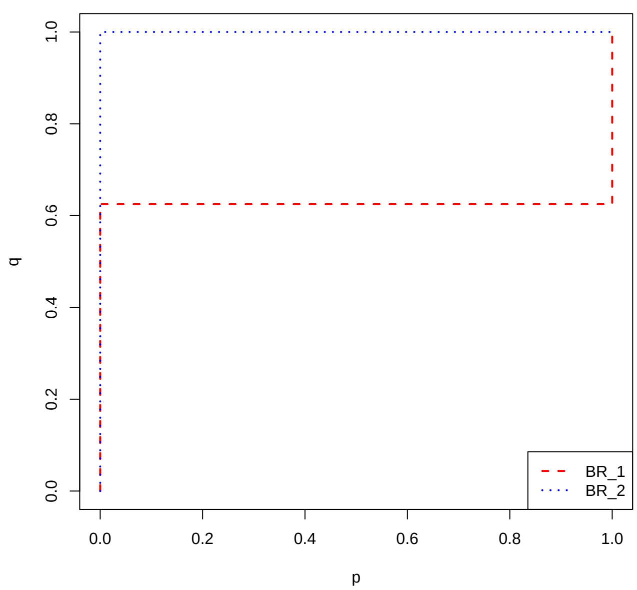
$\mathbb{E}U(D,\theta_2) = 2q + 8(1-q) = 8 - 6q$. *Note que,* $8 - 6q > 2q + 3$ *si* $\frac{5}{8} > q$ *y* $8 - 6q < 2q + 3$ *si* $\frac{5}{8} < q$. *Por ende*

$$MR_1(q, 1-q) = \begin{cases} \sigma_1 = (0,1) & \textit{if } 0 \leq q < \frac{5}{8} \\ \sigma_1 = (1,0) & \textit{if } \frac{5}{8} > q \geq 1 \\ \sigma_1 = (p, 1-p) & \textit{if } \frac{5}{8} = q \end{cases}$$

Para el individuo 2, encontremos la mejor respuesta a la estrategia $\theta_1 = (p, 1-p)$. *Entonces tenemos que* $\mathbb{E}U(\theta_1, E) = 10p + 4(1-p) = 6p + 4$ *and* $\mathbb{E}U(\theta_1, G) = 4p + 4(1-p) = 4$. *Note que,* $6p + 4 > 4$ *if* $p > 0$ *and* $6p + 4 < 4$ *if* $p < 0$. *Esto quiere decir que:*

$$BR_2(p, 1-p) = \begin{cases} \sigma_2 = (1,0) & \textit{if } p > 0 \\ \sigma_2 = (q, 1-q) & \textit{if } p = 0 \end{cases}$$

Figure 8: Mejores Respuestas



Por ende tenemos infinitos equilibrios de Nash. $NE = \{(G, D), (A, \sigma_2^q)\}$ *donde* $\sigma_2^q = (q, 1-q)$ *y* $0 \leq q \leq \frac{5}{8}$.

4 Juegos dinámicos con información completa

Los juegos dinámicos se caracterizan por que los jugadores mueven de forma secuencial, y al menos uno de ellos observa, en al menos un caso, que hizo otro jugador antes de mover. En estos juegos también podemos aplicar el concepto de equilibrio de Nash pero en algunos casos lleva a resultados "ilógicos". Considere el siguiente ejemplo,

Ejemplo 13 (Firma entrante)**.** *Una firma (firma 1) debe decidir si entrar a un mercado donde otra firma (la firma 2) o no. Si la firma 1 entra, entonces la firma dos debe decidir si realizar una guerra de precios para quedarse con el mercado o no hacer nada y acomodar a la otra firma. El siguiente árbol de juego refleja esta situación.*

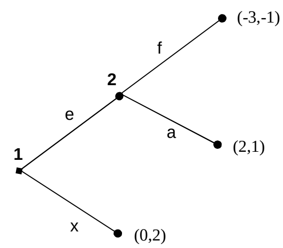


Figure 9: Tomada de las notas de clase de Navin Kartik.

Para encontrar el equilibrio de Nash podemos escribir la forma normal y vemos que existen dos equilibrios de Nash: (x,f) y (e,a).

Ejercicio 8. *Escriba la forma normal de este juego y verifique que (x,f) y (e,a) son equilibrios de Nash.*

Sin embargo, (x,f) es un equilibrio de Nash únicamente por que la firma 2 amenaza con realizar una guerra de precios y si la firma 1 cree que esta amenaza es creíble entonces prefiere salirse. El problema es que esta amenaza no es creíble, pues si la firma uno decide entrar el mercado, la firma dos prefiere no hacer nada. En esta sección estudiaremos un "refinamiento" del equilibrio de Nash llamado Equilibrio Perfecto en Subjuegos. La manera natural de solucionar este problema, es pedir que la estrategias que hacen parte del equilibrio, indiquen acciones óptimas en cada nodo de decisión. Es decir, requerimos que los individuos elijan acciones que optimicen su utilidad, suponiendo que se llego al nodo específico. En el ejemplo anterior, la acción f no es optima, dado que se llego a ese nodo de decisión, pues siempre es mejor jugar a.

4.0.1 Inducción hacia atrás

Una manera natural de asegurar esta optimalidad, es moverse nodo por nodo desde el final del juego hasta el principio, y encontrar la acción optima en cada nodo. A medida que se va hacia "atrás" (hacia el principio del juego) se optimiza teniendo en cuenta las movidas óptimas en nodos que se encuentran mas adelante en el juego. Este procedimiento se conoce como "inducción hacia atrás". En juegos finitos (un número finito de nodos) donde todos los conjuntos de información contienen un solo nodo (i.e. los jugadores siempre saben en que nodo se encuentran) existe un teorema muy poderoso.

Teorema 3 (Zermelo)**.** *Todo juego finito donde todos los conjuntos de información contienen un solo nodo tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras que se puede derivar por medio de inducción hacia atrás. Si ningún jugador recibe el mismo pago en dos nodos "terminales" diferentes, entonces el equilibrio de Nash es único.*

Este teorema es mucho más poderoso de lo que parece a simple vista. Por ejemplo, implica que un juego tan complejo como el ajedrez es soluble. Soluble, quiere decir, que existe una estrategia ganadora o que garantiza el empate para alguno de los dos jugadores. Esto no quiere decir que alguien sepa cuál es la solución, solo que sabemos que existe. Recuerde el juego del ciempiés con una pequeña modifican. Cada persona empieza con 1 peso. Este es un juego finito donde todos los conjuntos de información contienen un solo nodo.

	C	P
C,C	3,**3**	0,2
C,P	**4**,1	0,**2**
P,C	1,**0**	**1**,**0**
P,P	1,**0**	**1**,**0**

Table 19: Juego Cienpies en forma normal o estratégica

Note que el único equilibrio de Nash de este juego son $\{(P,P),P\}$ y $\{(P,C),P\}$. Suponga ahora, que el juego se extiende a 1000 rondas. Analizar este juego por medio de la forma normal sería **muy** engorroso. El teorema de Zermelo nos permite resolverlo de manera sencilla. La solución siempre es que todos los jugadores dicen P cuando sea su turno.

4.0.2 Equilibrio Perfecto en Subjuegos

Considere el siguiente juego

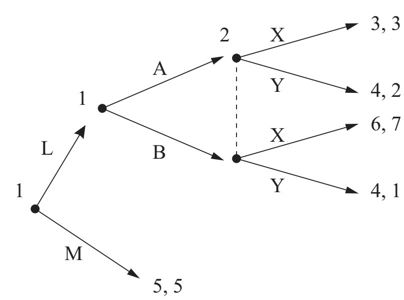


Figure 10: Tomada de las notas de clase de Navin Kartik.

Este juego no se puede resolver por inducción para atrás, pues el individuo 2 no sabe en cual de los dos nodos se encuentra y por ende su problema de optimización no es claro. Es aquí donde introducimos el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos. Para ello primero debemos definir que es un subjuego.

Definición 11 (Subjuego)**.** *Un subjuego, de un juego en forma extensiva, es un subarbol tal que:*

- *Empieza en un único nodo de decisión.*
- *Contiene todos los nodos que siguen a su nodo inicial.*
- *Si contiene cualquier punto de un conjunto de información, entonces contiene todo el conjunto de información.*

Note que el juego original es un subjuego en sí.

Ejercicio 9. *Identify todos los subjuegos de los juegos en las figuras 9 y 10.*

Ya tenemos todos los elementos para definir un equilibrio perfecto en subjuegos. La idea es extender la metodología de inducción para atrás. Dado que en algunos juegos no podemos definir de manera clara que significa que una persona optimice en todos los nodos, reemplazamos el concepto de Equilibrio de Nash por el de optimización.

Definición 12 (Equilibrio Perfecto en Subjuegos)**.** *Un equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) es un perfil de estrategias tal que es un equilibrio de Nash en todos los subjuegos.*

Ejercicio 10. *Demuestre que todo equilibrio perfecto en subjuegos es un equilibrio de Nash.*

Ejemplo 14. *Considere el juego en la figura 10. Para encontrar el equilibrio perfecto en subjuegos, primero note que hay dos subjuegos. El juego total y el subjuego que comienza en el nodo donde el primer individuo decide entre A y B. No existen más subjuegos (convezcase de esto). A continuación se presenta la forma normal o estratégica de ambos subjuegos:*

1 \ 2	X	Y
LA	3, 3	4, 2
LB	6, 7	4, 1
MA	5, 5	5, 5
MB	5, 5	5, 5

1 \ 2	X	Y
A	3, 3	4, 2
B	6, 7	4, 1

Figure 11: Tomada de las notas de clase de Joel Watson.

El juego original tiene un tres equilibrios de Nash (LB,X), (MA,Y),(MB,Y). El subjuego propio tiene un único equilibrio de Nash (B,X). Es decir cualquier perfil de estrategias donde el primer individuo no juegue B en el segundo periodo (esto descarta (MA,Y)) o donde el segundo individuo no seleccione X (esto descarta (MA,Y),(MB,Y)) no pueden ser EPS. Es decir el único EPS es (LB,X).

4.1 Aplicaciones

Aquí seguiremos de cerca las notas de Marcela, al igual que la sección sobre juegos repetidos.

5 Juegos estáticos con información incompleta

Es normal que los jugadores no siempre conozcan los objetivos de sus contrincantes perfectamente. Por ejemplo, cuando se subasta un objeto, yo conozco (o eso nos gustaría pensar) mi valoración del objeto subastado, pero no la de los demás. Este tipo de problemas estuvo fuera del alcance de la teoría de juegos por un periodo de tiempo relativamente largo pues uno pensaría que para resolver este tipo de juegos es necesario incorporar la creencia de los individuos sobre las preferencias de los otros, y las creencias de los otros sobre las preferencias de los individuos y sobre las creencias sobre las preferencias de ellos, e incorporar las creencias de los individuos sobre las creencias que los otros tienen sobre sus creencias, y así al infinito. Esto es simplemente muy complicado. Harsanyi encontró una solución muy intuitiva y elegante. Su idea centra es transformar un juego de información incompleta en un juego de información completa pero imperfecta. En el jerga económica se conoce como el "tipo" de un jugador, la función objetivo que este tiene. Si por ejemplo yo creo que la utilidad de mi contrincante es de la forma $u(x) = (x - c)^2$ donde x es un numero que el elige y c es un parámetro que yo desconozco, decimos que el jugador es de tipo "c_0" si creemos que su función de utilidad es $u(x) = (x - c_0)^2$. Otra manera de pensar en esto es: nos imaginamos que la función de utilidad de un jugador es determinada por la Naturaleza por medio de una variable aleatoria. La distribución de dicha variable aleatoria es información común. Cada jugador observa la realización de la variable aleatoria que determina su utilidad pero no la de los demás. Una realización de la variable aleatoria para un individuo es un "tipo". La solución de Harsanyi consiste en imaginarse que cada jugador cree que tiene la posibilidad de enfrenta a varios jugadores distintos, uno por cada tipo. En un equilibrio el debe jugar una mejor respuesta a la estrategia esperada (en el sentido matemático) de todos sus contrincantes, al mismo tiempo todos sus contrincantes deben estar jugando una mejor respuesta a lo que haga el. Primero debemos definir de manera formal todos los elementos de un juego bayesiano:

Definición 13. *Un juego bayesiano esta compuesto for un conjunto de jugadores (I), un conjunto de estrategias para cada jugador (S_i), un conjunto de tipos para cada jugador (Θ_i) y una function de utilidad para cada jugador, que depende del tipo (i.e. $u_i : \mathbb{S} \times \Theta \to \mathbb{R}$), y una distribución F sobre los tipos.*

Ahora definiremos una regla de decisión. Una regla de decisión le asigna una estrategia a un "tipo". Es decir si s_i es una regla de decisión entonces $s_i : \Theta_i \to S_i$. Marcela llama a esto estrategias en sus notas de clase. Yo quise hacer la distinción para evitar confusiones con la notación anterior.

Definición 14. *Un equilibrio Bayes-Nash es un perfil de reglas de decisión s^*, tal que:*

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}} u_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}, \theta_i) \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}} u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}, \theta_i)$$

para toda regla de decisión s_i y todo $\theta_i \in \Theta_i$.

Esta puede verse complejo, pero es simplemente lo que discutimos arriba. Cada "tipo" de cada jugador maximiza su utilidad esperada. s_i nos dice que estrategia sigue un jugador dependiendo de su "tipo". Veamos algunos ejemplos para tratar de aterrizar algunos conceptos.

5.1 Ejemplos

Ejemplo 15 (Por amor o por dinero. Tomado de las notas de clase de Navin Kartik.)**.** *Suponga que Ana y Bart se van a casar. Ana tiene mucho dinero y no está segura si Bart en realidad esta enamorado de ella o si es un caza-recompensas. La probabilidad de que Bart la ame es α. Cada jugador debe elegir si casarse o no. Si alguno decide no casarse ambos obtienen un pago de cero. Si los dos deciden casarse entonces Bart obtiene 5 si esta enamorado y 3 si es un caza-recompensas., mientras que Ana recibe 5 si Bart esta enamorado y -3 si es un caza-recompensas. Claramente, si hubiera información completa, Ana nunca se casaría (esto seria un equilibrio de Nash, encuentre exactamente el equilibrio de Nash como ejercicio) si Bart es un caza-recompensas y si se casaría (encuentre exactamente el equilibrio de Nash como ejercicio) si Bart esta enamorado. Para encontrar el equilibrio de Bayes-Nash consideremos el problema de Bart primero. Si el es un* *caza-recompensas entonces su función de mejor respuesta es:*

$$MR_{Bart,CR} = \begin{cases} C & \text{if } S_{ana} = C \\ \{C, NC\} & \text{if } S_{ana} = NC \end{cases}$$

Si Bart esta enamorado entonces su función de mejor respuesta es:

$$MR_{Bart,E} = \begin{cases} C & \text{if } S_{ana} = C \\ \{C, NC\} & \text{if } S_{ana} = NC \end{cases}$$

La utilidad esperada de Ana, dado que se casa es:

$$\mathbb{E}U_{Ana} = \begin{cases} 5\alpha - 3(1-\alpha) = 8\alpha - 3 & \text{if } S_{Bart,E} = C, S_{Bart,CR} = C \\ -3(1-\alpha) = 3\alpha - 3 & \text{if } S_{Bart,E} = NC, S_{Bart,CR} = C \\ 5\alpha & \text{if } S_{Bart,E} = C, S_{Bart,CR} = NC \\ 0 & \text{if } S_{Bart,E} = NC, S_{Bart,CR} = NC \end{cases}$$

La utilidad de no casarse es siempre cero. Por ende la función de mejor respuesta depende de α.

$$MR_{ana} = \begin{cases} C & \text{if } S_{Bart,E} = C, S_{Bart,CR} = C, \alpha \geq \frac{3}{8} \\ NC & \text{if } S_{Bart,E} = C, S_{Bart,CR} = C, \alpha \leq \frac{3}{8} \\ NC & \text{if } S_{Bart,E} = NC, S_{Bart,CR} = C, \alpha \in [0,1] \\ C & \text{if } S_{Bart,E} = NC, S_{Bart,CR} = C, \alpha = 1 \\ C & \text{if } S_{Bart,E} = C, S_{Bart,CR} = NC, \alpha \in [0,1] \\ NC & \text{if } S_{Bart,E} = C, S_{Bart,CR} = NC, \alpha = 0 \\ C & \text{if } S_{Bart,E} = NC, S_{Bart,CR} = NC, \alpha \in [0,1] \\ NC & \text{if } S_{Bart,E} = NC, S_{Bart,CR} = NC, \alpha \in [0,1] \end{cases}$$

Denote por (a, b, c) la tripleta de estrategias donde a denota la estrategia seguida por Ana, b la seguida por Bart cuando esta enamorado y c la seguida por Bart cuando es un caza-recompensas. Entones es fácil ver que que (NC, NC, NC) y (NC, NC, C) siempre son equilibrios Bayes-Nash. Si $\alpha \geq \frac{3}{8}$ entonces (C, C, C) también es un equilibrio, y si $\alpha \leq \frac{3}{8}$ entonces (NC, C, C) es un equilibrio.

Ejercicio 11. *Existen otros equilibrios Bayes-Nash en el ejemplo anterior?*

Ejemplo 16. *Suponga que tiene una subasta de segundo precio donde la valoración de cada individuo del objeto está distribuida uniformemente entre 0 y 1 (i.i.d). En este tipo de subasta la persona con la mayor oferta gana el objeto pero paga la segunda oferta más alta. Todo el mundo conoce su valoración del objeto pero no la de los demás. N individuos participan en la subasta. Entonces ofertar la valoración del objeto es una estrategia débilmente dominada. Por ende existe un equilibrio Bayes-Nash donde todo el mundo ofrece su valoración.*

Ejemplo 17. *Ahora suponga que tiene una subasta de primer precio donde la valoración de cada individuo del objeto esta distribuida uniformemente entre 0 y 1 (i.i.d). En este tipo de subasta la persona con la mayor oferta gana el objeto y paga lo que oferto. Vamos a tratar de encontrar un equilibrio simétrico donde todo el mundo sigue la regla de decisión $b(v)$. Supongamos que hay* *dos individuos. Si la otra persona está usando la regla de decisión $b(v)$ y yo oferto a, cuando mi valoración es v, entonces el valor esperado de mi utilidad es*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}U(a,v) &= P(a > b(v_{-i}))(v-a) \\
&= P(b^{-1}(a) > v_{-i})(v-a) \\
&= \left(b^{-1}(a)\right)(v-a)
\end{aligned}$$

Aquí hay dos maneras de encontrar el equilibrio la primera es usando el teorema de la envolvente. De ese teorema tenemos que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}U(b(v),v)}{\partial v} = \frac{\partial \mathbb{E}U(a,v)}{\partial v}|_{a=b(v)}$$

Note que $\partial \mathbb{E}U(b(v),v) = \Pi(v) = v(v-b(v))$ es el pago en equilibrio para el jugador de valoración v. Por ende

$$\begin{aligned}
\Pi'(v) &= \left(b^{-1}(a)\right) n|_{a=b(v)} \\
\Pi'(v) &= v \\
\Pi(x) - \Pi(0) &= \int_0^x v, dv \\
x(x-b(x)) &= \frac{1}{2}v^2|_0^x \\
x - \frac{1}{2}x &= b(x) \\
\frac{1}{2}x &= b(x)
\end{aligned}$$

La segunda forma es utilizando maximización individual, es un poco mas intuitiva pero requiere mas álgebra. Nosotros teníamos

$$\mathbb{E}U(a,v) = \left(b^{-1}(a)\right)(v-a)$$

Entonces diferenciemos con respecto a a y encontramos que a maximiza la utilidad del individuo.

$$\begin{aligned}
-\left[b^{-1}(a)\right] + (v-a)\frac{1}{b'(b^{-1}(a)} &= 0 \\
-\left[b^{-1}(a)\right] b'(b^{-1}(a)) + (v-a) &= 0 \\
-\left[b^{-1}(b(v))\right] b'(b^{-1}(b(v)) + (v-b(v)) &= 0 \\
-[v]\, b'(v) + (v_i - b(v)) &= 0 \\
vb'(v) + b(v) &= v \\
(vb(v))' &= v \\
vb(v) &= \frac{1}{2}v^2 + C \\
b(v) &= \frac{1}{2}v + C
\end{aligned}$$

Dado que $b(0) = 0$ entonces $b(v) = \frac{1}{2}v$.

Ejercicio 12. *De algún tipo de intuición a por que en la subasta de segundo precio yo oferto mi valuación mientras que en la subasta de primer precio oferto la mitad.*

Ejemplo 18. *Vamos a probar que la ganancia esperada para el subastador es la misma y que la ganancia esperada para cada persona que participa en la subasta es la misma, independientemente de si se usa la subasta de primer precio o la de segundo precio. En la subasta de segundo precio, en equilibrio, yo pago el máximo de las valoraciones que están por debajo de la mía. Entonces lo que yo espero pagar en la subasta de segundo precio es*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}U(v) &= \int_0^v (v-a)f_{v_{-i}}(a), da \\
&= \int_0^v (v-a), da \\
&= va - \frac{a^2}{2}|_0^v \\
&= \frac{v^2}{2}
\end{aligned}$$

Lo que espera ganar el subastador es el valor esperado de la segunda valoración mas alta. Para esto necesitamos encontrar la distribución del mínimo entre v_1 y v_2.

$$P(\min(v_1, v_2) < a) = P(v_1 < a) + P(v_2 < a) - P(v_1 < a)P(v_2 < a) = 2a - a^2 = F_{min}(a)$$

Por ende la función de densidad del mínimo entre v_1 y v_2 es $f_{min}(a) = 2 - 2a$. Eso quiere decir que el pago esperado para el subastador es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}pago &= \int_0^1 af_{min}(a), da \\
&= \int_0^1 2a - 2a^2, da \\
&= a^2 - \frac{2}{3}a^3|_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ahora pensemos en la subasta de primer precio. La oferta de cada individuo es $b(v) = \frac{1}{2}v$. Por ende el pago esperado es

$$U(v) = \left(v - \frac{1}{2}v\right)v$$

$$U(v) = \frac{v^2}{2}$$

Ahora el subastador gana la valoración mas alta, por ende su pago es el valor esperado de la valoración mas alta. Para esto necesitamos encontrar la distribución del máximo entre v_1 y v_2.

$$F_{max}(a) = P(v_1 < a, v_2 < a) = P(v_1 < a)P(v_2 < a) = a^2$$

Por ende la función de densidad del máximo entre v_1 y v_2 es $f_{max}(a) = 2a$. Eso quiere decir que el pago esperado para el subastador es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}pago &= \int_0^1 \frac{1}{2} a f_{max}(a), da \\
&= \int_0^1 a^2, da \\
&= \frac{1}{3} a^3 |_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Note que esto quiere decir que en equilibrio las dos subastas son equivalentes. Este resultado es un caso particular de un resultado mucho más general que indica que la subasta de primer y segundo precio (y muchas otras subastas) son equivalentes sin importar el número de participantes ni la distribución de las valoraciones.

Ejemplo 19. *Considere una competencia entre dos firmas al estilo Cournot donde las firmas no saben cual es el costo marginal de su contrincante. Las firmas pueden tener costos c_H o c_L donde $c_H > c_L$. Cada firma conoce su propio costo pero no el de la otra. Se sabe que $P(c_H, C_H) = P(c_L, C_L) = \frac{1}{2}\alpha$ y que $P(c_L, C_H) = P(c_H, C_L) = \frac{1}{2}(1-\alpha)$. La función e demanda inversa esta dada por $P = a - bQ$. Este ejemplo es una generalización del ejemplo que se encuentra en las notas de Marcela. Para encontrar el equilibrio Bayes-Nash encontremos un equilibrio simétrico. Un individuo con costos c_H se enfrenta al siguiente problema*

$$\max \Pi = \alpha(a - b(q_{c_H} - q) - c_H)q + (1-\alpha)(a - b(q_{c_L} - q) - c_H)q$$

Donde q_{c_H} y q_{c_L} son las cantidades que los individuos de tipo c_H y de tipo c_L producirían. Entonces las condiciones de primer orden nos dicen:

$$\alpha(a - b(q_{c_H} - 2q) - c_H) + (1-\alpha)(a - b(q_{c_L} - 2q) - c_H) = 0$$

Pero como es un individuo de tipo c_H se debe cumplir, en equilibrio, que:

$$\alpha(a - b(q_{c_H} - 2q_{c_H}) - c_H) + (1-\alpha)(a - b(q_{c_L} - 2q_{c_H}) - c_H) = 0$$

De manera similar un individuo con costos c_L se enfrenta al siguiente problema

$$\max \Pi = \alpha(a - b(q_{c_L} - q) - c_L)q + (1-\alpha)(a - b(q_{c_H} - q) - c_L)q$$

Entonces las condiciones de primer orden nos dicen:

$$\alpha(a - b(q_{c_L} - 2q) - c_L) + (1-\alpha)(a - b(q_{c_H} - 2q) - c_L) = 0$$

Pero como es un individuo de tipo c_H se debe cumplir, en equilibrio, que:

$$\alpha(a - b(q_{c_L} - 2q_{c_L}) - c_L) + (1-\alpha)(a - b(q_{c_H} - 2q_{c_L}) - c_L) = 0$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\alpha(a - b(q_{c_H} - 2q_{c_H}) - c_H) + (1-\alpha)(a - b(q_{c_L} - 2q_{c_H}) - c_H) = 0$$

$$\alpha(a - b(q_{c_L} - 2q_{c_L}) - c_L) + (1-\alpha)(a - b(q_{c_H} - 2q_{c_L}) - c_L) = 0$$

De aquí deducimos las cantidades que cada tipo de jugador produce.

Ejemplo 20. *Considere una subasta donde "todos pagan". Es decir, sin importar si la persona gano o no gano el objeto paga su oferta. Suponga que hay dos individuos y que su valoración se distribuye uniforme entre 0 y 1. Encuentre el equilibrio Bayes-Nash. Suponga que el otro individuo sigue la regla $b(v)$.*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U(a,v) &= P(a > b(v_{-i}))v - a \\ &= P(b^{-1}(a) > v_{-i})v - a \\ &= \left(b^{-1}(a)\right)v - a\end{aligned}$$

Diferenciando con respecto a a obtenemos la condición de primer orden:

$$\frac{1}{b'(b^{-1}(a)}v - 1 = 0$$

Dado que en equilibrio $a = b(v)$ entonces tenemos:

$$\frac{1}{b'(v}v = 1$$

$$v = b'(v)$$

$$b(v) = \frac{v^2}{2}$$

. Note que el valor esperado para un participante es

$$U(v) = \left(b^{-1}(b(v))\right)v - b(v)$$

$$U(v) = v^2 - \frac{v^2}{2}$$

$$U(v) = \frac{v^2}{2}$$

El pago esperado para el subastador es el pago que espera recibir de cada individuo, es decir:

$$2\int_0^1 \frac{v^2}{2}, dv = \frac{v^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 21. *Considere la siguiente situación. Dos ejércitos van a atacar una isla. Cada ejército debe decidir si atacar o no atacar. Cada ejército es "Fuerte" o "Débil", pero cada ejército conoce su "tipo" pero solo sabe que su contrincante tiene la misma probabilidad de ser "Fuerte" o "Débil". La isla vale M si es capturada por un ejército. Un ejército captura la isla si lo hace cuando su ataca* *y su rival no ataca, o cuando ataca y es "fuerte" y su rival ataca y es "débil". Adicionalmente, los ejércitos tiene un costo de ir a la guerra de s cuando son fuertes y de w cuando son débiles donde $s < w$. No existe ningún costo de atacar si el rival no ataca. Se sabe que $M > s$. Identifique todos los equilibrios Bayes -Nash. Voy a analizar cuál es el pago esperado para jugador de acuerdo a la regla de decisión que el otro jugador escoge. Voy a denotar por X^sY^w la regla de decisión donde X es la acción que se hace cuando se es "Fuerte" y Y la acción que se realiza cuando se es "Débil". Si el jugador $-i$ juega A^sA^w, entonces los pagos esperados, para cada "tipo" jugador i, dependiendo de la regla de decisión que elija son:*

Table 20: Si la regla de decisión del jugador $-i$ es A^sA^w. A todos los pagos falta multiplicarlos por $\frac{1}{2}$.

	Tipo=S	Tipo=w
A^sA^w	M-2s	-2w
N^sA^w	0	-w
A^sN^w	M-2s	0
N^sN^w	0	0

Si $M > 2s$ entonces A^sN^w es la mejor respuesta, pero si $M < 2s$ entonces N^sN^w es la mejor respuesta. Si el jugador $-i$ juega A^sN^w, entonces los pagos esperados, para cada "tipo" jugador i, dependiendo de la regla de decisión que elija son:

Table 21: Si la regla de decisión del jugador $-i$ es A^sN^w. A todos los pagos falta multiplicarlos por $\frac{1}{2}$.

	Tipo=S	Tipo=w
A^sA^w	M-s	M-w
N^sA^w	0	M-w
A^sN^w	M-s	0
N^sN^w	0	0

Si $M > w$ entonces A^sA^w es la mejor respuesta, si $M < w$ entonces A^sN^w es la mejor respuesta. Si el jugador $-i$ juega N^sA^w, entonces los pagos esperados, para cada "tipo" jugador i, dependiendo de la regla de decisión que elija son:

Table 22: Si la regla de decisión del jugador $-i$ es N^sA^w. A todos los pagos falta multiplicarlos por $\frac{1}{2}$.

	Tipo=S	Tipo=w
A^sA^w	M-2s	M-w
N^sA^w	0	M-w
A^sN^w	M-2s	0
N^sN^w	0	0

Si $M > w$ y $M > 2s$ entonces $A^s A^w$ es mejor respuesta.
Si $M > w$ y $M < 2s$ entonces $N^s A^w$ es mejor respuesta.
Si $M < w$ y $M > 2s$ entonces $A^s N^w$ es mejor respuesta.
Si $M < w$ y $M < 2s$ entonces $N^s N^w$ es mejor respuesta.
Si el jugador $-i$ juega $N^s N^w$, entonces los pagos esperados, para cada "tipo" jugador i, dependiendo de la regla de decisión que elija son:

Table 23: Si la regla de decisión del jugador $-i$ es $N^s N^w$. A todos los pagos falta multiplicarlos por $\frac{1}{2}$.

	Tipo=S	Tipo=w
$A^s A^w$	2M	2M
$N^s A^w$	0	2M
$A^s N^w$	2M	0
$N^s N^w$	0	0

Entonces $A^s A^w$ es la mejor respuesta. En resumen: Si $M > w$ y $M > 2s$ entonces:

$$MR_i(A^s A^w) = A^s N^w$$

$$MR_i(N^s A^w) = A^s A^w$$

$$MR_i(A^s N^w) = A^s A^w$$

$$MR_i(N^s N^w) = A^s A^w$$

Si $M > w$ y $M < 2s$ entonces:

$$MR_i(A^s A^w) = N^s N^w$$

$$MR_i(N^s A^w) = A^s A^w$$

$$MR_i(A^s N^w) = N^s A^w$$

$$MR_i(N^s N^w) = A^s A^w$$

Si $M < w$ y $M > 2s$ entonces:

$$MR_i(A^s A^w) = A^s N^w$$

$$MR_i(N^s A^w) = A^s N^w$$

$$MR_i(A^s N^w) = A^s N^w$$

$$MR_i(N^s N^w) = A^s A^w$$

Si $M < w$ y $M < 2s$ entonces:

$$MR_i(A^s A^w) = N^s N^w$$

$$MR_i(N^s A^w) = A^s N^w$$

$$MR_i(A^s N^w) = N^s N^w$$

$$MR_i(N^s N^w) = A^s A^w$$

Entonces los equilibrios Bayes-Nash son: Si $M > w$ y $M > 2s$ entonces:

$$BNE = \{(A^s A^w, A^s N^w), (A^s N^w, A^s A^w)\}$$

Si $M > w$ y $M < 2s$ entonces:

$$BNE = \{(A^s A^w, N^s N^w), (, N^s N^w, A^s A^w)\}$$

Si $M < w$ y $M > 2s$ entonces:

$$BNE = \{(A^s N^w, A^s N^w)\}$$

Si $M < w$ y $M < 2s$ entonces:

$$BNE = \{(A^s A^w, N^s N^w), (N^s N^w, A^s A^w)\}$$

6 Juegos dinámicos con información incompleta

6.1 Introducción sin información incompleta

Considere el siguiente juego:

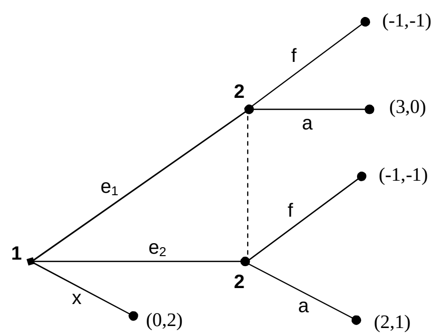


Figure 12: Tomada de las notas de clase de Navin Kartik.

Si calculamos los equilibrios de Nash de este juego vemos que (x, f) es un E.N. y dado que no hay subjuegos propios no es posible usar el refinamiento de equilibrio perfecto en subjuegos. Sin embargo, dado que la firma 1 entro, la firma 2 mejor responde con a y por ende es mejor para la firma 1 elegir e_1. Eso es lo que la "intuición" nos dice. Para poder lidiar con este tipo de situaciones, así como con situaciones donde existe información incompleta se utiliza el equilibrio Bayesiano Perfecto. Antes de poder definir un equilibrio Bayesiano Perfecto es necesario definir un sistema de creencias y como dichas creencias se actualizan. Un sistema de creencias es una distribución de probabilidad sobre todos los nodos que se encuentran en un mismo conjunto de información. Denotamos un sistema de creencias por μ. En la figura 12 existen tres conjuntos de información. El nodo de decisión de la firma uno es un conjunto de información y dado que tiene un solo evento posible la única distribución de probabilidad posible es la que le da probabilidad uno. Por otro lado, el conjunto de información donde el individuo dos toma una decisión tiene dos nodos y por ende una distribución de probabilidad le asigna p al nodo de arriba y $1-p$ al nodo de abajo, con $p \in [0,1]$. Si en equilibrio, la firma dos juega e_1 siempre, yo como individuo dos debería incorporar eso en mi sistema de creencias y asignar $p = 1$. La manera formal de hacer esto es utilizando actualización Bayesiana. De manera formal, sea x un nodo de un conjunto de información H, y $\mu(x)$ la creencia de que estamos en el nodo x, entonces decimos que si se sigue la estrategia (mixta) σ entonces:

$$\mu(x) = \frac{P(x|\sigma)}{P(H|\sigma)}$$

siempre y cuando $P(H|\sigma) > 0$. Si $P(H|\sigma) = 0$ podemos asignar a $\mu(x)$ cualquier valor entre cero y uno. Es decir la probabilidad de estar en ese nodo, se calcula por medio de una actualización bayesiana cuando sea posible. Un perfil de estrategias (o reglas de decisión) es un equilibrio Bayesiando Perfecto si maximiza la utilidad esperada de todos los individuos, dado lo que hacen los demás, tal que la utilidad esperada se calcula de acuerdo al sistema de creencias y el sistema de creencias se calcula por medio de actualización bayesiana. En términos formales:

Definición 15. *Un equilibrio Bayesiano Perfecto es un perfil de reglas de decisión s^*, tal que:*

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i},\mu}\left[u_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})|\mu, H\right] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i},\mu}\left[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})|\mu, H\right]$$

para toda regla de decisión s_i y todo $\theta_i \in \Theta_i$, y para todo conjunto de información H siempre y cuando μ se calcule por medio de una actualización bayesiana.

En palabras, estamos tratando de capturar tres cosas. Primero, el concepto de equilibrio Bayes-Nash donde todos los "tipos" de un jugador están maximizando la utilidad esperada. Segundo, que dado que estoy en un conjunto de información H, estoy maximizando, esto captura el concepto de que el juego es dinámico y que en todo momento donde yo tomo una decisión, esta decisión debe ser óptima. Por último, captura el concepto de actualización bayesiana. Esta definición es muy formal, y es difícil ver como esto nos ayuda a resolver un juego. La manera de hacerlo es usando inducción hacia atrás, combinada con actualización bayesiana. Note, que adicionalmente, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4. *Todo equilibrio Bayesiano Perfecto es un Equilibrio de Nash.*

Comencemos a hacer ejemplos. Este es uno de esos temas que solo se aprende "haciendo".

6.2 Ejemplo

Ejemplo 22. *Veamos el juego de la figura 12. Primero note que este juego tiene dos equilibrios de Nash (e_1, a) y (x, f). Sea p la probabilidad de estar en el nodo de arriba en el conjunto de información del jugador 2. Entonces el pago esperado de jugar f para el jugador dos es -1 y de jugar a es $0 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1-p$. Note que $1-p > -1$ para todo $p \in [0,1]$ entonces el jugador dos siempre juega a. Teniendo esto en cuenta, el jugador 1 gana 3 si juega e_1, 2 si juega e_2 y 0 si juega x y por ende juega e_2. Esto implicaría, que la creencia del jugador dos de encontrarse en el nodo de arriba se calcularía por actualización Bayesiana y seria $p = \frac{0}{1} = 0$. Entonces (e_1, a) seria un equilibrio bayesiano perfecto con el sistema de creencias que asigna $p = 0$. Por otro lado, (x, f) no es un equilibrio Bayesiano perfecto. Note que dado que el conjunto de información del jugador dos nunca se alcanza, podemos asignar cualquier probabilidad a los nodos. Sin embargo, sin importar la* *probabilidad a es mejor respuesta, y dado que a es mejor respuesta, e_1 y no x es la mejor respuesta del jugador uno a lo que hace el jugador 2.*

Ejemplo 23. *Considere el siguiente juego:*

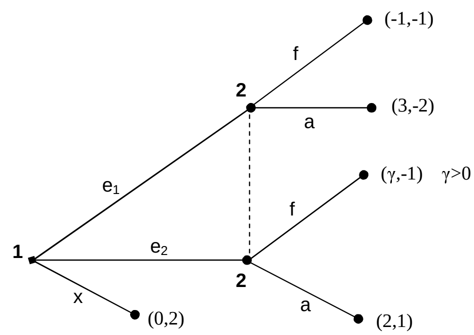


Figure 13: Tomada de las notas de clase de Navin Kartik.

Para encontrar los equilibrios bayesianos perfectos denotemos por p la probabilidad que el individuo dos le asigna a estar en el nodo superior de su conjunto de información. Entonces el pago esperado de jugar f es -1 mientras que el pago esperado de jugar a es $-2p + (1-p)$, entonces el juega f siempre y cuando $p > \frac{2}{3}$ y juega a si $p < \frac{2}{3}$ (y es indiferente cuando $p = \frac{2}{3}$). Entonces encontremos los equilibrios por casos. Suponga que $p > \frac{2}{3}$ entonces el jugador 2 juega f y por ende el jugador 1 prefiere jugar e_2 pero entonces por actualización bayesiana $p = \frac{0}{1} = 0$ y por ende $p < \frac{2}{3}$ lo cual es una contradicción. Por ende no existe un equilibrio bayesiano perfecto donde $p > \frac{2}{3}$. Si $p < \frac{2}{3}$ entonces el jugador 2 juega a y entonces el jugador 1 juega e_1, en este caso por actualización bayesiana $p = \frac{1}{1} = 1$ lo cual es una contradicción. Por descarte, $p = \frac{2}{3}$, y en este caso el jugador dos es indiferente entre f y a y digamos que juega f con probabilidad σ_2 y $1 - \sigma_2$. Ahora note que e_2 domina a x y por ende la firma 1 nunca juega x. Denote por σ_1 la probabilidad de que el individuo 1 juegue e_1 y $1 - \sigma_1$ la probabilidad de que juegue e_2, entonces

$$p = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + (1 - \sigma_1)} = \sigma_1 = \frac{2}{3}$$

Pero entonces, para que la firma 1 este "mezclando" entre e_1 y e_2 es porque es indiferente entre las dos, y por ende debemos tener $-1q + 3(1-q) = \gamma q + 2(1-q)$ y por ende $q = \frac{1}{\gamma+2}$. Por ende el equilibrio bayesiano perfecto esta dado por $s_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0), s_2 = (\frac{1}{\gamma+2}, 1 - \frac{1}{\gamma+2})$.

Ejemplo 24. *Ahora suponga que $\gamma = -\frac{1}{2}$ en el juego anterior. Para encontrar los equilibrios bayesianos perfectos denotemos por p la probabilidad que el individuo dos le asigna a estar en el nodo superior de su conjunto de información. Entonces el pago esperado de jugar f es -1 mientras que el pago esperado de jugar a es $-2p + (1-p)$, entonces el juega f siempre y cuando $p > \frac{2}{3}$ y juega a si $p < \frac{2}{3}$ (y es indiferente cuando $p = \frac{2}{3}$). Entonces encontremos los equilibrios por casos. Suponga que $p > \frac{2}{3}$ entonces el jugador 2 juega f y por ende el jugador 1 prefiere jugar x pero* *entonces por actualización bayesiana p puede ser cualquier cosa y por ende elegimos $p > \frac{2}{3}$. Por ende existe un equilibrio bayesiano perfecto donde $p > \frac{2}{3}$ que esta dado por $s_1 = x$ y $s_2 = f$. Si $p < \frac{2}{3}$ entonces el jugador 2 juega a y entonces el jugador 1 juega e_1, en este caso por actualización bayesiana $p = \frac{1}{1} = 1$ lo cual es una contradicción.*

6.3 Información Incompleta

Hasta ahora hemos estudiado juegos donde no existe información incompleta, simplemente para practicar como usar la actualización Bayesiana.

Ejemplo 25. *Considere el siguiente juego entre A y B. Primero la naturaleza selecciona primero C o D. C se selecciona con probabilidad* 0.7 *y D se selecciona con probabilidad* 0.3. *En segunda instancia A elige E o F. A no sabe que selecciono la naturaleza cuando tomo su decisión. Después B elige G o H después de observar lo que hizo A. Si la A elige E entonces B sabe que "eligió" la naturaleza, pero si A elige F no sabe que jugo la naturaleza. A y B siempre reciben la misma utilidad. Esta es cero cuando A elige E y B elige G, sin importar que selecciono la naturaleza; reciben* 5 *si A elige E y B elige H sin importar que selecciono la naturaleza; reciben 0 si la naturaleza selecciono C, A selecciono F y B selecciono G; reciben 10 si la naturaleza selecciono C, a selecciono F y B selecciono H; reciben 10 si la naturaleza selecciono D, a selecciono F y B selecciono G; ; reciben 10 si la naturaleza selecciono D, a selecciono F y B selecciono H;*
El juego en forma extensiva seria:

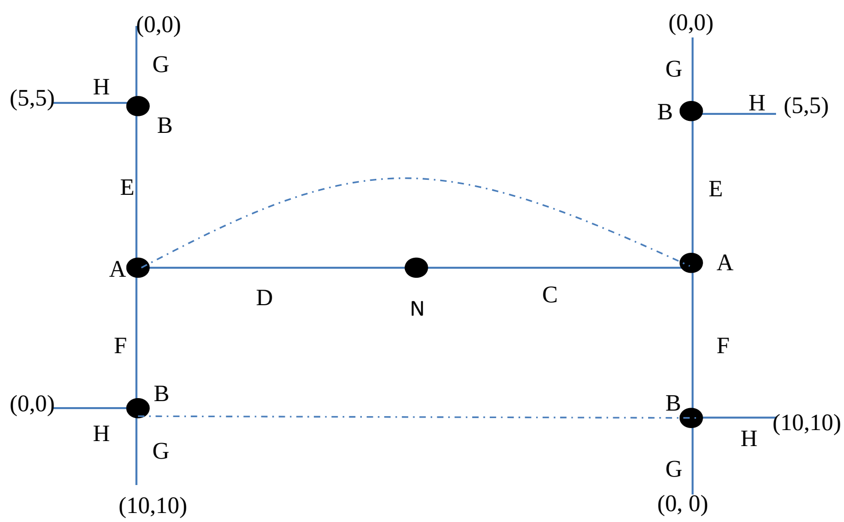


Figure 14:

Sea p la probabilidad que el individuo dos le asigna al nodo de abajo a la derecha, entonces después de observar F el juega G si $10(1-p) > 10p$. Es decir si $p < \frac{1}{2}$. Si $p > \frac{1}{2}$ entonces el juega H. Si $p = \frac{1}{2}$ es indiferente.

Por otro lado, el juega H cuando observa E.
Vayamos por casos. Supongamos que $p < \frac{1}{2}$ es decir que el juega G. Entonces si el jugador 1 juega E obtiene 5, y si juega F obtiene $10 * 0.3 + 0 * 0.7 = 3$. Por ende prefiere jugar E, en cuyo casi no podemos actualizar de manera bayesiana las creencias y podemos asignarle cualquier probabilidad. En particular $p = 0$, lo que nos diría que el jugador 1 juegue E y el jugador dos juegue (H, H, G) es un equilibrio bayesiano perfecto (la ultima coordenada es que juega en el conjunto de información de abajo y las primeras es que juega en los conjuntos de información de arriba).
Por otro lado si $p > \frac{1}{2}$ entonces entonces si el jugador 1 juega E obtiene 5, y si juega F obtiene $0 * 0.3 + 10 * 0.7 = 7$, entonces el prefiere jugar F. Por actualización bayesiana $p = 0.7$, entonces esto también seria un equilibrio bayesiano perfecto i.e. el jugador 1 juega F y el jugador dos juega (H, H, H).

Ejemplo 26. *Considere el siguiente juego:*

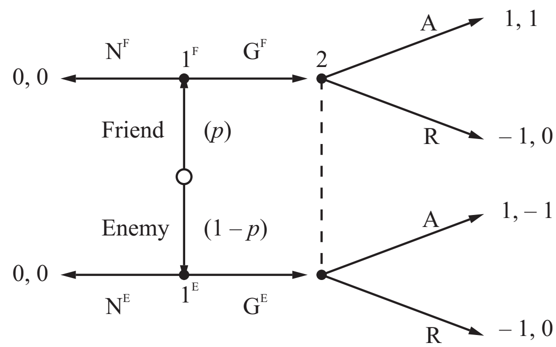


Figure 15: Tomada de las notas de clase de Joel Watson.

Considere el caso en que $p = \frac{2}{3}$. Denote por q la creencia que tiene el individuo dos de que esta en el nodo de arriba y por $1 - q$ la creencia de que esta abajo.
Así las cosas el jugador dos elige A siempre y cuando $1q - (1 - q) > 0$, i.e. $q > \frac{1}{2}$. De manera análoga elige R siempre y cuando $q < \frac{1}{2}$.
Si $q > \frac{1}{2}$ el jugador dos elige A y por ende el jugador 1 cuando elige G cuando en cualquier caso y por ende, por actualización bayesiana $q = p = \frac{2}{3}$, y por ende este si es un equilibrio bayesiano perfecto.
Si $q < \frac{1}{2}$, el jugador dos elige R y por ende el jugador 1 elige N en cualquier caso. Esto implicaría que podemos elegir cualquier q (pues el conjunto de información nunca es alcanzado) y por ende también es un equilibrio bayesiano perfecto.

Ejercicio 13. *Encuentre los equilibrios bayesianos perfectos de el juego anterior cuando $p = \frac{1}{3}$.*

Ejemplo 27. *Considere el siguiente juego:*

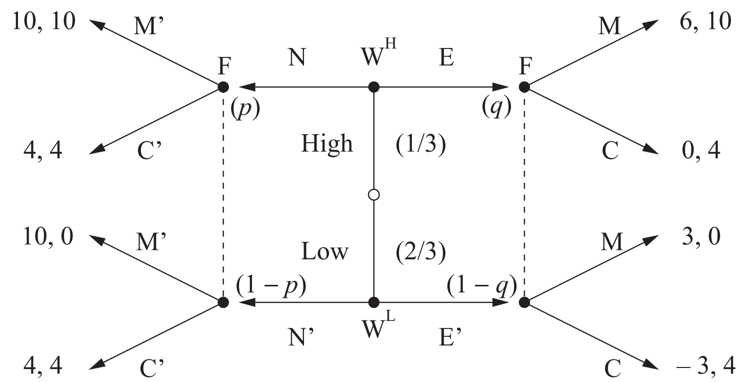


Figure 16: Tomada de las notas de clase de Joel Watson.

Note que el jugador dos elige M cuando observa E si $10q > 4$ i.e. si $q > \frac{4}{10}$. De manera análoga selecciona M' cuando observa N si $10p > 4$ i.e. si $p > \frac{4}{10}$.
Suponga que $q > \frac{4}{10}$ y $p > \frac{4}{10}$. Entonces el jugador dos eligiria (M, M'). Sabiendo esto, el jugador 1 jugaría (N, N'). Por actualización bayesiana $p = \frac{\frac{1}{3}1}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$. Por ende esto no es un equilibrio bayesiano perfecto.
Suponga que $q > \frac{4}{10}$ y $p < \frac{4}{10}$. Entonces el jugador dos eligiria (M, C'). Sabiendo esto, el jugador 1 jugaría (E, N'). Por actualización bayesiana $p = 0$ y $q = 1$. Por ende esto es un equilibrio bayesiano perfecto.
Suponga que $q < \frac{4}{10}$ y $p > \frac{4}{10}$. Entonces el jugador dos eligiria (C, M'). Sabiendo esto, el jugador 1 jugaría (N, N'). Por actualización bayesiana $p = \frac{1}{3}$ y q podría ser cualquier cosa. Por ende esto no es un equilibrio bayesiano perfecto.
Suponga que $q < \frac{4}{10}$ y $p < \frac{4}{10}$. Entonces el jugador dos eligiria (C, C'). Sabiendo esto, el jugador 1 jugaría (N, N'). Por actualización bayesiana $p = \frac{1}{3}$ y q podría ser cualquier cosa. Por ende esto es un equilibrio bayesiano perfecto.
Es decir hay dos equilibrios bayesianos perfectos: $\{(E, N'), (M, C')\}$ y $\{(N, N'), (C, C')\}$.

El primero se conoce como equilibrio separador, pues cada ”tipo” de jugador 1 hace una cosa diferente, mientras que el segundo es un equilibrio agrupador o ”pooling” pues ambos ”tipos” de jugador 1 hacen la misma cosa. Note que en el equilibrio ”pooling” nosotros seleccionamos q para que el equilibrio existiera, mientras que en el equilibrio separador todas las creencias están completamente determinadas. Esto sucede siempre. En los equilibrios separadores las creencias están completamente determinadas mientras que en los equilibrios agrupadores hay un conjunto de información que no se alcanza y por ende nosotros tenemos libertas de elegir las creencias en esos nodos.

Ejemplo 28. *Considere el siguiente ejemplo tomado de Cho & Kreps (1987).*

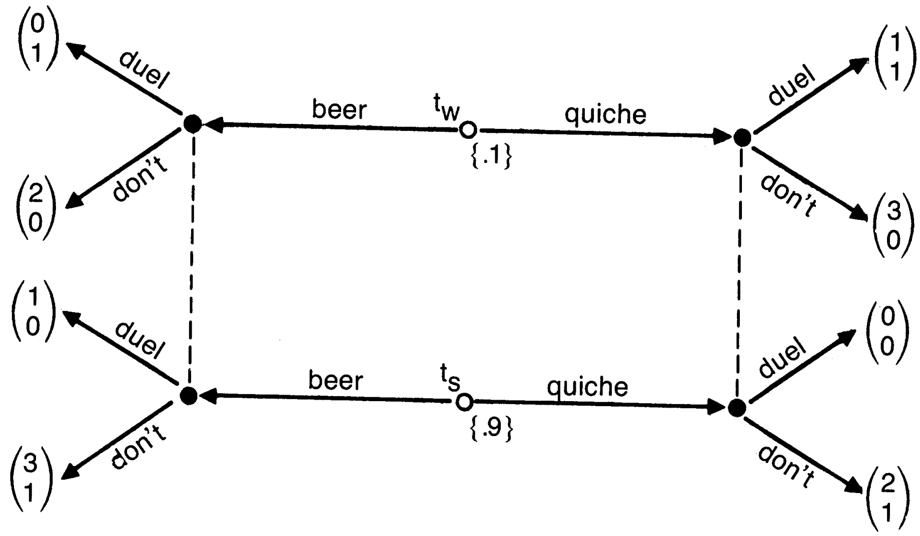


Figure 17: .

Denote por q *la creencia de estar en el nodo superior izquierdo y* p *la creencia de estar en el nodo superior derecho.*
El jugador dos selecciona "duelo" cuando se observa cerveza si $p > (1-p)$ *i.e. cuando* $p > \frac{1}{2}$. *De manera similar selecciona "duelo" cuando observa "quiche" si* $q > (1-q)$. *i.e. cuando* $q > \frac{1}{2}$.
Entonces si $p > \frac{1}{2}$ *y* $q > \frac{1}{2}$ *entonces dos selecciona* (D^B, D^Q). *Dado esto el jugador uno selecciona* (Q^w, B^s). *Pero por actualización bayesiana entonces* $q = 0$ *y* $p = 1$ *y por ende esto no es un equilibrio bayesiano perfecto.*
Si $p > \frac{1}{2}$ *y* $q < \frac{1}{2}$ *entonces dos selecciona* (N^B, D^Q). *Dado esto el jugador uno selecciona* (B^w, B^s). *Pero por actualización bayesiana entonces* $q = 0.1$ *y* p *puede ser cualquier cosa y por endo esto si es un equilibrio bayesiano perfecto.*
Si $p < \frac{1}{2}$ *y* $q > \frac{1}{2}$ *entonces dos selecciona* (D^B, N^Q). *Dado esto el jugador uno selecciona* (Q^w, Q^s). *Pero por actualización bayesiana entonces* q *puede ser cualquier cosa y* $p = 0.1$ *y por endo esto si es un equilibrio bayesiano perfecto.*
Si $p < \frac{1}{2}$ *y* $q < \frac{1}{2}$ *entonces dos selecciona* (N^B, N^Q). *Dado esto el jugador uno selecciona* (Q^w, B^s). *Pero por actualización bayesiana entonces* $q = 0$ *y* $p = 1$ *y por ende esto no es un equilibrio bayesiano perfecto.*

Ejercicio 14. *Considere el siguiente ejemplo. Encuentre los equilibrios Bayesianos Perfectos. Cuales son equilibrios separadores y cuales son equilibrios agrupadores "pooling"?*

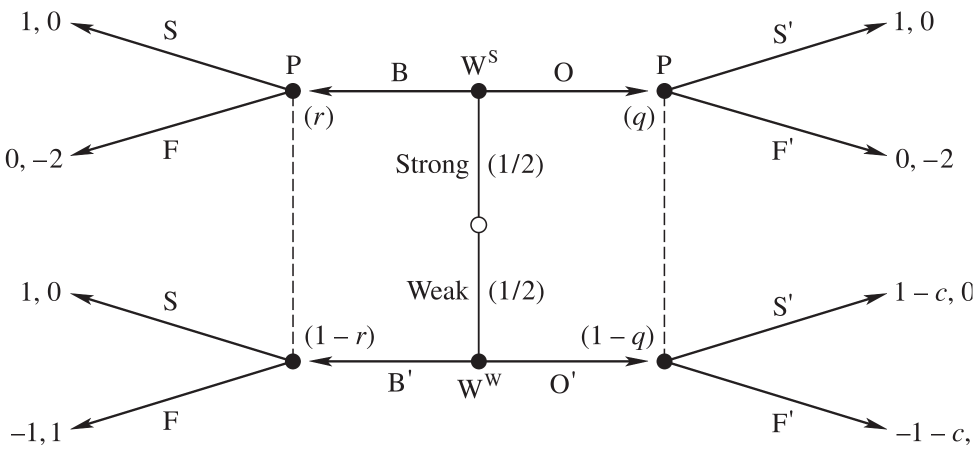


Figure 18: Tomada de las notas de clase de Joel Watson.

7 Bibliografía

Cho, I.-K. & Kreps, D. M. (1987), 'Signaling games and stable equilibria', *The Quarterly Journal of Economics* **102**(2), 179–221.

Eslava, M. (2013), Teoria de juegos: Notas de clase. Universidad de Los Andes.

Kartik, N. (2009), Lecture notes for 1st year ph.d. game theory.

A Breve repaso de teoría de la probabilidad

A.1 Introducción

Algunas cosas en la vida son **deterministicas** y otras son **aleatorias**. Por ejemplo, cuando lanzo una moneda al aire con seguridad esta caerá al piso (debido a la gravedad), en este sentido ese evento es deterministico. Por otro lado, si la moneda cada en cara o sello, es un evento aleatorio pues no podemos estar seguros, ex-ante, cuál de las dos caras de la moneda quedara bocarriba. Sin embargo, si lanzamos la moneda un gran número de veces, existe cierta **regularidad** en el número de veces que sale cara y el número de veces que sale sello. La teoría de la probabilidad se encarga de estudiar estas regularidades.

A.2 Medida de Probabilidad

Un evento aleatorio puede tener varios resultados posibles. Cada uno de estos resultados se denomina **suceso**. El conjunto de todos los sucesos posibles se denomina el **espacio muestral** Ω. Un conjunto $A \subset \Omega$ de varios sucesos se denomina **evento**. Note que en todo evento aleatorio estamos seguros que el evento Ω sucede con seguridad mientras que $\emptyset$ no sucede nunca.

Definición 16 (Medida Probabilidad)**.** *La probabilidad de que un evento A suceda se denomina por $P(A)$ y debe cumplir:*

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. *Si* $A \cap B = \emptyset$ *entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5. *Una medida de probabilidad cumple:*

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- *Si* $A \subset B$ *entonces* $P(A) \leq P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

A.3 Independencia y Probabilidad Condicional

Definición 17. *Decimos que dos eventos A y B son independientes si* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Teorema 6. *Si A y B son independientes entonces:*

- *A y B^c son independientes.*
- *A^c y B son independientes.*
- *A^c y B^c son independientes.*

Definición 18. *Definimos la probabilidad de A dado B como* $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Note que esto es una definición! No es un teorema.

Ejercicio 15. *Demuestre que $P(\cdot|B)$, dado que $P(B) > 0$, cumple con la definición de "Medida Probabilidad".*

Teorema 7 (Teorema de Bayes)**.**

$$P(A|B) = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$$

Ejemplo 29. *Suponga que una maquina le está mandado un mensaje en código Morse. Por ende, la maquina le manda "puntos" o "rayitas". La probabilidad de que la maquina mande un "punto" es $\frac{3}{7}$ y que la maquina mande una "rayita" es $\frac{4}{7}$. Pero se sabe que mientras que el mensaje viaja por las líneas del telégrafo existe una probabilidad de $\frac{1}{8}$ de que un punto se cambie por una rayita y una rayita por un punto. Si al final se recibe un punto, cual es la probabilidad de que la maquina* *en realidad haya enviado un punto? Podemos calcular esto de dos maneras diferentes. Primero definamos R como el evento "punto recibido" y E como "punto enviado". Entonces usando la definición de probabilidad condicional tenemos que:*

$$P(E|R) = \frac{P(E \cap R)}{P(R)}$$

Note que $P(E \cap R) = \frac{3}{7}\frac{7}{8} = \frac{3}{8}$. *Por otro lado* $P(R) = \frac{3}{7}\frac{7}{8} + \frac{4}{7}\frac{1}{8} = \frac{25}{56}$. *Esto implica que*

$$P(E|R) = \frac{21}{25}$$

También podríamos haber usado el teorema de Bayes.

$$P(E|R) = P(R|E)\frac{P(E)}{P(R)}$$

Note que $P(R|E) = \frac{7}{8}$. *i.e. es la probabilidad de que el mensaje no se cambie.* $P(E) = \frac{3}{7}$ *y* $P(R)$ *ya lo calculamos.*

A.4 Variables Aleatorias

Ahora ya sabemos cómo manejar la probabilidad de los resultados de un evento aleatorio, pero aun no podemos hacer mucho con esto. Es normal darle un número a cada resultado de un evento aleatorio. Por ejemplo, ya sabemos que en una ruleta de casino (que tiene 18 números rojos, 18 números negros y 2 números verdes) la probabilidad de que caiga rojo es $\frac{18}{38} = \frac{9}{19}$, pero en realidad lo que a nosotros nos interesa es saber cuál es la ganancia esperada si apuesto mil pesos al rojo. Esto es equivalente a asociar el evento "rojo" con el numero $1,000$ y el evento "negro o verde" con el numero $-1,000$. Esta asociación es lo que se llama una variable aleatoria. En términos formales

Definición 19. *Una variable aleatoria es una función* $\overline{X} : \Omega \to \mathbb{R}$. *Es decir es una función que le asigna un numero a los eventos del espacio muestral. Note que si* $\omega \in \Omega$ *entonces* $\overline{X}(\omega) \in \mathbb{R}$.

A groso modo una variable aleatoria es discreta si solo toma un numero enumerable de valores (los números naturales) y es continua si toma un número infinito no contable de valores (los números reales). Esta definición NO es formal, ni tampoco es del todo correcta, pero sirve para nuestros propósitos. Siempre usaremos X para determinar la variable aleatoria y x para determinar un posible valor que puede tomar dicha variable aleatoria.

A.5 Medida de probabilidad de una variable aleatoria

Ahora definimos la función de probabilidad de una variable aleatoria por

$$P_{\overline{X}}(A) = P(\overline{X} \in A)$$

. Cuando una variable aleatoria es discreta esto se llama la función de masa. Cuando una variable es continua siempre se tiene que:

$$P_{\overline{X}}(a) = P(\overline{X} \in \{a\}) = 0$$

Es decir la probabilidad de que un solo suceso ocurra es cero.

A.6 Función de Distribución

Definición 20. *Definimos la función de distribución acumulada como:*

$$F_{\overline{X}}(a) = P_{\overline{X}}((-\infty, a]) = P(\overline{X} \in (-\infty, a]) = P(\overline{X} \leq a)$$

La función de distribución tiene algunas propiedades interesantes

- $\lim_{a \to -\infty} F_{\overline{X}}(a) = 0$
- $\lim_{a \to \infty} F_{\overline{X}}(a) = 1$
- Si $a \leq b$ entonces $F_{\overline{X}}(a) \leq F_{\overline{X}}(b)$.
- $P(\overline{X} > a) = F_{\overline{X}}(a)$
- $P(a < \overline{X} \leq b) = F_{\overline{X}}(b) - F_{\overline{X}}(a)$.

La función de distribución acumulada existe tanto para variables discretas como continuas. Para variables discretas parece una escalera y para variables continuas es una función continua (Es más, por medio de la función de distribución acumulada es que se define si una variable es discreta o continua).

A.7 Función de masa de probabilidad y función de densidad

Cuando una variable es discreta ya teníamos que $P_{\overline{X}}(a)$ era la función de densidad. Pero dado que este número siempre es cero para una variable continua es necesario usar una definición diferente. La función de densidad de una variable continua es:

$$f_{\overline{X}}(a) = \frac{\partial F_{\overline{X}}(a)}{\partial a}$$

Note varias cosas, primero para variables continuas tenemos que:

$$F_{\overline{X}}(a) = \int_{-\infty}^{a} f_{\overline{X}}(x)dx$$

Segundo

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x)dx$$

De manera similar, para variables discretas tenemos que:

$$F_{\overline{X}}(a) = \sum_{k \leq a} P_{\overline{X}}(k)$$

y

$$1 = \sum_{k} P_{\overline{X}}(k)$$

A.8 Valor Esperado

El valor esperado de una variable aleatoria continua se define como:

Definición 21.
$$\mathbb{E}\overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\overline{X}}(x)dx$$

y de una variable discreta se define como:

Definición 22.
$$\mathbb{E}\overline{X} = \sum_{x} x P_{\overline{X}}(x)$$

A.9 Distribución Uniforme

En particular, para el tema de subastas, trabajaremos bastante con distribuciones uniformes. Por lo cual es conveniente dar variables propiedades de la misma. En general trabajemos con la distribución uniforme entre $[a, b]$.
Se dice que una variable aleatoria se distribuye uniforme (i.e. $\overline{X} \sim [a, b]$) si:

$$f_{\overline{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Esto implica que
$$F_{\overline{X}}(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

Finalmente el valor esperado esta dado por

$$\overline{\mathbb{X}} = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = x^2 \frac{1}{2(b-a)} |_{a}^{b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Adicionalmente, suponga que tenemos dos variables aleatorias independientes que de distribuyen uniforme entre $[a, b]$ i.e. $\overline{X} \sim [a, b]$ y $\overline{Y} \sim [a, b]$. Defina por $\overline{Z} = \max(\overline{X}, \overline{Y})$ entonces

$$F_{\overline{Z}}(z) = P(\overline{Z} \leq z) = P(\max(\overline{X}, \overline{Y}) \leq z) = P(\overline{X} \leq z)P(\overline{Y} \leq z) = \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^2$$

Esta implica que la función de densidad de $\overline{Z}$ está dada por:

$$f_{\overline{Z}}(z) = 2\left(\frac{z-a}{b-a}\right)\frac{1}{b-a}$$

.