Teoría de Juegos
Prof. Mauricio Romero
Parcial 2 - 22 de Julio de 2013

Nota 1: Debe devolver este enunciado y todas las hojas que le entreguen.
Nota 2: Está prohibido el uso de calculadora y de celular.
Nota 3: Puede usar todo los teoremas vistos en clase, siempre y cuando mencione las hipótesis que el teorema debe cumplir y justifique que las hipótesis se cumplen.
Nota 4: Todos los puntos valen lo mismo. La nota del examen será el número total de puntos multiplicado por 5/7. (i.e. $5\frac{Puntos}{7}$)

1. **1 punto** Considere una subasta de segundo precio.

   (a) **0.4 puntos** Demuestre que en una subasta de segundo precio ofertar mi valoración domina débilmente a todas las demás reglas de decisión sin importar cuantos jugadores existan ni cual es la distribución de la valoración de los jugadores.

   Solución: Esto esta en las notas de clase. Sea $\hat{b}$ la puja mas alta de los contrincantes. Si $v_i > \hat{b}$ con la puja v_i se gana la subasta. Pujando algo mas alto no se cambian los pagos ni la probabilidad de ganar. Pujando algo mas bajo, si se cae por debajo de $\hat{b}$ se pierde la subasta.

   Si $v_i < \hat{b}$ entonces se esta perdiendo la subasta con v_i y se gana cero, pero si se puja algo mas alto y se gana entonces se paga $\hat{b}$ y se obtiene una utilidad negativa.

   Por ende pujar v_i domina debilmente a todas las demás reglas de decisión.

   (b) **0.3 puntos** Encuentre un equilibrio de Bayes-Nash de este juego. Justifique.

   Solución:
   $$E.B.N. = (b(v_1) = v_1, ..., b(v_n) = v_n)$$
   Dado que pujar la valoración domina debilmente a todo lo demás, sin importar lo que hagan los demás yo no tengo ningún incentivo unilateral a desviarme.

   (c) **0.3 puntos** Comente la importancia de este resultado.

   Solución: Dado que la subasta de primer precio y la de segundo son equivalentes en términos de utilidad esperada para los participantes y de ganancias para el subastador, entonces la subasta de segundo precio es mejor pues le permite a uno extraer información. Adicionalmente, este resultado no depende de la distribución de las valoraciones ni de la cantidad de participantes.

2. **1 punto** Considere una subasta donde "todos pagan". Es decir, sin importar si la persona ganó o no ganó el objeto paga su puja. El individuo con la oferta más alta gana el objeto. Suponga que hay dos individuos y que cada uno conoce su valoración del objeto pero no sabe cuál es la valoración de su contrincante, solo sabe que es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre 0 y 1, i.e. $v_{-i} \sim U[0, 1]$. Encuentre el equilibrio Bayes-Nash. Puede suponer que en el equilibrio $b(v) = kv^2$. Los siguientes numerales le ayudaran a ir paso a paso por la demostración.

   (a) **0.3 puntos** Encuentre la utilidad esperada del individuo i si oferta a pero valora el objeto v y el oponente sigue la regla de decisión $b(v) = kv^2$.

   Solución:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}U(b_i, v_i)U &= v_i P(b_i > b(v_{-i}) - b_i \\
\mathbb{E}U(b_i, v_i)U &= v_i P(b_i > kv_{-i}^2) - b_i \\
\mathbb{E}U(b_i, v_i)U &= v_i P(\sqrt{\frac{b_i}{k}} > v_{-i}) - b_i \\
\mathbb{E}U(b_i, v_i)U &= v_i \sqrt{\frac{b_i}{k}} - b_i
\end{aligned}
$$

(b) **0.3 puntos** Encuentre cual es la oferta optima para el individuo i si valora el objeto v.

Solución: Derivando la utilidad esperada con respecto a b_i e igualando a cero:

$$
\begin{aligned}
v_i \frac{b_i^{-0.5}}{2\sqrt{k}} - 1 &= 0 \\
v_i \frac{1}{2\sqrt{k}} &= b_i^{0.5} \\
v_i^2 \frac{1}{4k} &= b_i
\end{aligned}
$$

(c) **0.4 puntos** En equilibrio la oferta optima del individuo i si valora el objeto v debe seguir $b(v) = kv^2$. Utilice esta información para encontrar el valor de k. ¿Cuál es el equilibrio Bayes-Nash?

Solución:

$$
\begin{aligned}
v_i^2 \frac{1}{4k} &= kv_i^2 \\
\frac{1}{4} &= k^2 \\
\frac{1}{2} &= k
\end{aligned}
$$

El equilibrio Bayes-Nash es donde ambos individuos siguen la regla de valoración $b(v) = \frac{1}{2}v^2$.

3. **1 punto** Demuestre que en una subasta de primer precio ofrecer mi valoración no es un equilibrio Bayes-Nash. Suponga que hay dos individuos y que cada uno conoce su valoración del objeto pero no sabe cuál es la valoración de su contrincante, solo sabe que es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre 0 y 1, i.e. $v_{-i} \sim U[0, 1]$. Para la demostración siga los siguientes pasos:

(a) **0.3 puntos** Encuentre la utilidad esperada del individuo i si oferta a pero valora el objeto v y el oponente sigue la regla de decisión $b(v) = v$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}U(b_i, v_i)U &= (v_i - b_i)P(b_i > b(v_{-i}) \\
\mathbb{E}U(b_i, v_i)U &= (v_i - b_i)P(b_i > v_{-i}) \\
\mathbb{E}U(b_i, v_i)U &= (v_i - b_i)b_i
\end{aligned}
$$

(b) **0.3 puntos** ¿Cuál es la oferta optima para el individuo i si valora el objeto v.

Solución: Derivando con respecto a b_i e igualando a cero:

$$\begin{aligned} v_i - 2b_i &= 0 \\ b_i &= \frac{v_i}{2} \end{aligned}$$

(c) **0.4 puntos** Concluya. Es decir justifique porque pujar mi valoración no es un equilibrio Bayes-Nash.

Solución: Dado que si la otra persona puja su valoración, yo prefiero pujar la mitad de la mia, esto no es un equilibrio Bayes Nash pues yo tengo incentivos unilaterales a desviarme.

4. **1 punto** Imagínese la batalla de los sexos entre "el" y "ella", donde "el" no sabe si "ella" en realidad quiere ir a una cita con "el" (probabilidad $\frac{3}{5}$) o si "ella" lo está evitando (probabilidad $\frac{2}{5}$). Los dos pueden elegir ir al golfito (G) o a tomar Pola (P). Si ella quiere ir a una cita con "el" la matriz de pagos seria:

		El	
Ella		G	P
	G	3,1	0,0
	P	0,0	1,3

Table 1: Cuando "ella" quiere salir con "el"

Si "ella" está tratando de evitarlo entonces la matriz de pagos seria:

		El	
Ella		G	P
	G	0,3	1,0
	P	3,0	0,1

Table 2: Cuando "ella" está evitando verse con "el"

(a) **0.1 puntos** Cuantos tipos hay para cada jugador.

Solución: Hay dos tipos para "ella" y un solo tipo para "el"

(b) **0.2 puntos** Como es una regla de decisión para cada jugador.

Solución:
$S_{ella} = A^q, A^e$ $S_{el} = A$
Donde A^q es una acción cuando quiere verlo y A^e es una acción cuando lo evita.

(c) **0.7 puntos** Encuentre el equilibrio Bayes-Nash de este juego.

Solución:
Encontremos la mejor respuesta de "ella" primero:

$$MR_{ella} = \begin{cases} P^q G^e & \text{si } S_{el} = P \\ G^q P^e & \text{si } S_{el} = G \end{cases}$$

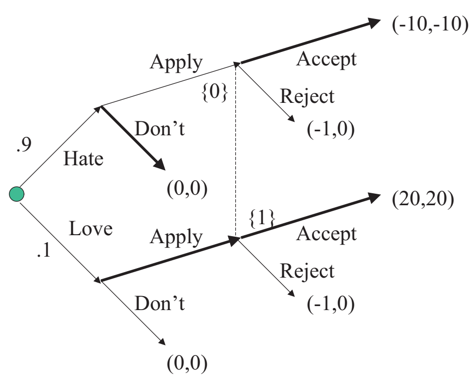
Dado que "ella" solo jugaría P^qG^e o G^qP^e solo debemos encontrar la mejor respuesta de "el" a estas situaciones.
Si a el le juegan P^qG^e entonces el pago esperado de P es $\frac{3}{5}3$ y se juega G es $\frac{3}{5}2$ entonces juega P.
Si a el le juegan G^qP^e entonces el pago esperado de P es $\frac{2}{5}1$ y se juega G es $\frac{3}{5}1$ entonces juega G.

$$MR_{el} = \begin{cases} P & \text{si } S_{ella} = P^qG^e \\ G & \text{si } S_{ella} = G^qP^e \end{cases}$$

Por ende (G, G^qP^e) y (P, P^qG^e) son ambos equilibrios de Bayes Nash.

5. **1 punto** Considere la siguiente situación. Un estudiante está aplicando a una Maestría en Economía. El comité de admisión no sabe si la persona en realidad "ama" la economía o la "odia" pero sabe que el 90% de la gente en el mundo "odia" la economía. El estudiante debe decidir si aplicar o no. Si no aplica, el pago tanto para el comité como para el estudiante es cero. Si el estudiante aplica, el comité debe decidir si aceptarlo o no. Si lo rechaza el comité tiene un pago de cero y el estudiante de -1. Si lo acepta, el pago depende de si el estudiante "ama" la economía o no. Si el estudiante "ama" la economía, el pago es de 20 tanto para el comité como para el estudiante. Si el estudiante, odia la economía, el pago es de -10 para ambos.

   (a) **0.3 puntos** Represente este juego en forma extensiva



   (b) **0.4 puntos** Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos.

   Solución:
   Hay dos equilibrios. Un equilibrio separador donde aplica solo la persona que "ama" la economía. Es decir
   $$EBP = (A^aN^o, A^aN^n)$$
   Donde A^aN^o indica que la persona aplica si ama la economía y no aplica si la odia, y el comité acepta a toda persona que aplique.
   El otro es un equilibrio agrupador donde nadie aplica y el comité no acepta a nadie. i.e.
   $$(N^aN^o, N^aN^n)$$
   en este caso la creencia por fuera del equilibrio es que si alguien aplica, la probabilidad de que odie la economía es uno. Este equilibrio no tiene mucho sentido.

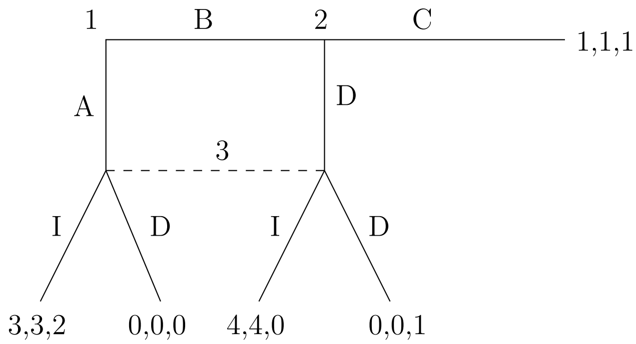
   (c) **0.1 puntos** ¿Cuales de estos equilibrios son separadores y cuales son agrupadores?

   Solución: Ver numeral anterior.

(d) **0.2 puntos** ¿Cuales de estos equilibrios son "lógicos" o se pueden justificar y cuáles no?

Solución: Ver numeral anterior.

6. **1 punto** Considere el siguiente juego:



(a) **1 punto** Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos.

Solución: El EBP es (B, C, D) con una creencia para el jugador tres de estar en el nodo de la derecha de uno.

7. **1 punto** La jefe de un hospital debe decidir si contratar a un nuevo cirujano o no. Los cirujanos pueden ser de "alta" o "baja" calidad. Es bien sabido que un tercio de los cirujanos en el mundo son de alta calidad. El hospital solo quiere contratar personas de alta calidad, pero esta información es desconocida para el jefe del hospital, que solo puede ver si la persona fue a "Uniandes" o a "Unigaraje". Sin embargo, también se sabe que algunos cirujanos de baja calidad logran graduarse de "Uniandes" gracias (por que se copian, el profesor es un "bacán" y los pasa, etc.) y algunos cirujanos de alta calidad irán a "Unigaraje" pues es más barato y más fácil graduarse por lo que tienen más tiempo libre. Se calcula que el costo adicional para los cirujanos de baja calidad de graduarse de "Uniandes" es de 21, comparado con graduarse de "Unigaraje". Para los cirujanos de alta calidad este costo adicional es solamente de 4 unidades. El hospital paga un salario de 20 si contrata a la persona y recibe un ingreso de 40 si contrata a una persona de alta calidad (es decir las ganancias serian de 20) y un ingreso de 0 si contrata a alguien de baja calidad(es decir sus ganancias serian de -20). El juego sucede la siguiente forma. La naturaleza selecciona si la persona es de alta o baja calidad, después la persona selecciona si ir a "Uniandes" o a "Unigaraje" y finalmente la firma, habiendo observado la decisión educativa de la persona, decide si contrata o no contrata a la persona.

(a) **0.1 puntos** Represente este juego en forma extensiva.

Solución:

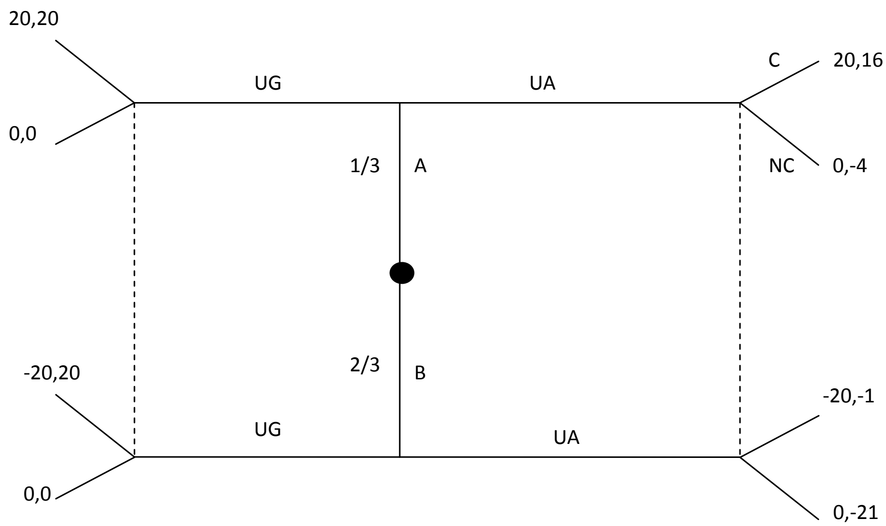


Figure 1: Los pagos están en el orden incorrecto!

(b) **0.3 puntos** Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos.

Solución:
Para que contrate en cada conjunto de información se tiene que tener que la creencia de estar arriba es mayor a 0.5.
Esto implica que hay dos equilibrios de Bayesianos perfectos:

$$(C^{UA}NC^{UG}, UA^{A}UG^{B})$$

Es decir se contrata a la gente de uniandes, no se contrata a los de unigaraje, y los de alta calidad van a uniandes y los de baja a unigaraje. Esto hace que la creencia de estar en el nodo de arriba a la izquierda sea cero y de arriba a la derecha sea uno. Este es un equilibrio separador.
Hay otro equilibrio:

$$(NC^{UA}NC^{UG}, UG^{A}UG^{B})$$

En este casi por actualización bayesiana la creencia de estar en el nodo de arriba ala izquierda es $\frac{1}{3}$ y elegimos la creencia del nodo de arriba a la derecha igual a cero. Este es un equilibrio agrupador que no tiene mucho sentido, pues uno esperaría que la gente que fuera a uniandes es la de alta calidad.

(c) **0.1 puntos** ¿Cuales de estos equilibrios son separadores y cuales son agrupadores?

Solución: Ver numeral anterior.

(d) **0.3 puntos** ¿Qué pasaría si el costo de ir a "Uniandes" baja a 10 (por ejemplo, porque nadie persigue la copia? Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos.

Solución: En este caso el equilibrio separador desaparece y se vuelve:

$$(C^{UA}NC^{UG}, UA^{A}UA^{B})$$

Es decir se contrata a la gente de uniandes, no se contrata a los de unigaraje, y todo el mundo va a uniandes.

(e) **0.2 puntos** Justifica este modelo la obsesión de los Andes con que los estudiantes no se copien? Responda utilizando los resultados del modelo y añadiendo intuición.

Solución:

Si, si el "costo extra" de los andes no es suficientemente alto, entonces la universidad no sirve como señalización de alta calidad.

8. **Bono de 0.5** Considere una subasta de herencia. Es decir, dos hermanos heredan una fabrica de su padre. Para decidir quien se queda con la fabrica ellos hacen una subasta de primer precio entre ellos, donde la puja mas alta gana, paga su puja y se queda con la fabrica. La diferencia con una subasta normal de primer precio, es que el perdedor se queda con la puja del ganador. Es decir si i gana con b_i entonces el se queda con $v_i - b_i$ y el perdedor se queda con b_i. Suponga que cada individuo conoce su valoración pero no la de su hermano, y solo sabe que $v_{-i} \sim U[0,1]$. Encuentre un equilibrio Bayes-Nash de este juego. Si quiere puede suponer que en equilibrio $b(v) = kv$.

Solución:

La utilidad esperada acá es

$$\mathbb{E}U = (v_i - b_i)P(b_i > b(v_{-i})) + \int_{b^{-1}(b_i)}^{1} b(v_{-i})dv_{-i}$$

$$\mathbb{E}U = (v_i - b_i)P(\frac{b_i}{k} > v_{-i}) + \int_{\frac{b_i}{k}}^{1} b(v_{-i})dv_{-i}$$

$$\mathbb{E}U = (v_i - b_i)\frac{b_i}{k} + \int_{\frac{b_i}{k}}^{1} kv_{-i}dv_{-i}$$

Diferenciando con respecto a b_i tenemos:

$$\frac{v_i}{k} - 2\frac{b_i}{k} - k\frac{b_i}{k}\frac{1}{k} = 0$$

$$\frac{v_i}{k} - 2\frac{b_i}{k} - \frac{b_i}{k} = 0$$

$$v_i = 3b_i$$

En equilibrio $b_i = kv_i$ entonces:

$$v_i = 3kv_i$$

$$k = \frac{1}{3}$$

Para otros **0.25 puntos** puntos adicionales, calcule la utilidad esperada en equilibrio y compare la con la subasta de primer precio.

Solución:

$$\mathbb{E}U = (2\frac{v_i}{3})v_i + \int_{v_i}^{1} 3v_{-i}dv_{-i}$$

$$\mathbb{E}U = (2\frac{v_i^2}{3}) + \frac{3}{2}v_{-i}^2|_{v_i}^{1}$$

$$\mathbb{E}U = \frac{2v_i^2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}v_i^2$$
$$\mathbb{E}U = \frac{3}{2} - \frac{5}{6}v_i^2$$

Es diferente a la subasta de primer precio normal.

Para otros **0.25 puntos** puntos adicionales demuestre que si en vez de una subasta de primer precio, se hiciera una subasta de segundo precio, entonces pujar la valoración **no** es un equilibrio.

Solución:

Este se los dejo como ejercicio.