Universidad de los Andes
Facultad de Economía
Teoría de Juegos
Profesor: Mauricio Romero

Solución Taller 4: Juegos dinámicos con información completa. Inducción hacia atrás.
Fecha: lunes 8 de julio

1. Suponga una situación de mercado duopolista tipo Stachelberg. Encuentre el Equilibrio Perfecto de Subjuegos (EPS) para esta situación. Sea explícito en el proceso. (1 punto)

   Juego

   - i=1,2.
   - $A_i = q_i \in \mathbb{R}+.$
   - Max $\Pi_i = (p-c)q_i$
     (q_i)

     $p = a - Q$
     $p = a - (q_1 + q_2)$
   - Información completa.
   - En t=1: i=1 mueve, i=2 observa.
   - En t=2: i=2 mueve.

2. Compare este resultado con el óptimo social. ¿Es el EPS la respuesta que le otorga mayor bienestar a los individuos? Bono.

Solución:

1) Por I. A:

1) t = 2 → infinitos subjuegos (1 para cada q_1 posible).
→ subjuego = q_1
$FR_2 \to q_2^*(q_1)$: mejor q_2 para cada subjuego.

$$\underset{\{q_2\}}{\text{Max}} \, [a - q_1 - q_2 - c] \, q_2$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2}: a - q_1 - c - 2q_2 = 0$$

$$\boxed{q_2^* = \frac{a - c - q_1}{2}} \; FR_2$$

2) $t=1 \to$ tengo en cuenta el q_2^*

$$\underset{\{q_1\}}{\text{Max}}\ (a-q_1-q_2^*-c)q_1$$

$$= \left[a-\left[\frac{a-c-q_1}{2}\right]-q_1-c\right]q_1$$

$$= \left[\frac{a-c-q_1}{2}\right]q_1$$

$$\boxed{q_1^* = \frac{a-c}{2}}\ FR_1$$

3) $EPS = \left\{ q_1 = \frac{a-c}{2} \ , \ q_2 = \frac{a-c-q_1}{2} \right\}$

Resultado: q_1 en $FR_2 \to q_2 = \frac{a-c}{4}$

$\to p = \frac{a-3c}{4}$

$\to \Pi_1 = \frac{(a-c)^2}{8} \ , \ \Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{16}$

2. (Bono)

Bienestar EPS:

- será la suma de las utilidades según el EPS:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{8} + \frac{(a-c)^2}{16} = \boxed{\frac{3}{16}(a-c)^2}$$

Óptimo Social:

$\underset{\{q_1\}}{\text{Max}}\ \Pi_1 = [a-q_1-q_2-c] \cdot q_1$

C.P.O. $\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0$

$q_1(q_2) = \frac{a-q_2-c}{2} \to FR_1$

$\underset{\{q_2\}}{\text{Max}}\ \Pi_2 = [a-q_1-q_2-c] \times q_2$

C.P.O $\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0$

$q_2(q_1) = \frac{a-q_1-c}{2} \to FR2$

- Intersección de FR:

$$q_1 - q_2 = \frac{a - q_2 - c}{2} - \frac{a - q_1 - c}{2}$$

$$2(q_1 - q_2) = \cancel{a} - q_2 - \cancel{c} - \cancel{a} + q_1 + \cancel{c}$$

$$2q_1 - q_1 = 2q_2 - q_2$$

$\boxed{q_1 = q_2}$ → se dará un equilibrio cuando se cumpla esta condición.

$$q_1 = \frac{a - \left[\frac{a - q_1 - c}{2}\right] - c}{2}$$

$$q_1 = \frac{a - c - q_1}{4}$$

$$q_1' = \frac{a-c}{3} \rightarrow q_2' = \frac{a-c}{3}$$

$$\boxed{Q = \frac{2}{3}(a-c)}$$

$$p = a - \frac{2}{3}(a-c)$$

$$p = \boxed{\frac{a+2c}{3}}$$

$$\pi_1 = (p-c)q_1 = \left(\frac{a+2c}{3} - c\right) \times \frac{a-c}{3}$$

$$\pi_1' = \frac{(a-c)^2}{9}, \quad \pi_2' = \frac{(a-c)^2}{9}$$

Bienestar Social:

$$\pi_1 + \pi_2 = \boxed{\frac{2}{9}(a-c)^2}$$

Como $\frac{3}{16} < \frac{2}{9}$, se puede ver que en este caso de EPS no es necesariamente un óptimo social.