Solución Taller 7: JDIC
Teoría de Juegos: Mauricio Romero
Fecha: viernes 12 de julio, 2013

Juego Base:

1) i = (Banco Central, público)

2) $A_{BC} = \pi$, $\pi \in \mathbb{R}$

$A_P = \pi^e$, $\pi^e \in \mathbb{R}$

3) estático

4) completa

5) Pagos: $U_P = -(\pi^e - \pi)^2$

$$U_{BC} = -(\pi - p)^2 - a(\pi - \pi^e - y^*)^2$$

p: nivel meta π

y^* = producto cíclico

1) Juego Estático:

$$FR_{BC}: \max_{\{\pi\}} -(\pi - p)^2 - a(\pi - \pi^e - y^*)^2$$

$$\frac{dU_{BC}}{d\pi} = -2(\pi - p) - 2a(\pi - \pi^e - y^*)$$

$$\frac{d^2U_{BC}}{d\pi^2} = -2 - 2a < 0 \rightarrow \text{cóncava}$$

CPO: $-2(\pi - p) = -2a(-\pi + \pi^e + y^*)$

$(\pi - p) = -a\pi + a(\pi^e + y^*)$

$\pi(a+1) = p + a(\pi^e + y^*)$ (1)

$$FR_P = \max_{\{\pi^e\}} -(\pi^e - \pi)^2$$

$$\frac{dU_P}{d\pi^e} = -2(\pi^e - \pi)$$

$$\frac{dU_P}{d\pi^e} = -2 < 0 \rightarrow \text{cóncava}$$

C.P.O: $-2(\pi^e - \pi) = 0$

$\pi^e = \pi$ (2)

E.N. $\rightarrow$ (2) en (1): $\pi(1 + a) = p + a(\pi + y^*)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi^{EN} = p + ay^* \\ \pi^{e\,EN} = p + ay^* \end{array}} \longrightarrow$$

⚠ Hay infinitas maneras de mejorar a BC y P dado un nivel de inflación entre $[0; ay^*]$, de forma que $\pi = \pi^e = p$.

* Comparemos ahora las utilidades.

① $U_{BC}^{EN} = -(\cancel{p} + ay^* - \cancel{p})^2 - a(\cancel{\Pi - \Pi} - y^*)^2$

$= -(ay^*)^2 - a(y^*)^2$

② $U^*_{BC} = -(\cancel{p - p})^2 - a(y^*)^2$
$(\pi^e = \pi = p)$

$= -(a)(y^*)^2$

$U^*_{BC} > U^{EN}_{BC}$, ahora evaluemos si esto se puede sin empeorar a P.

$U^{EN}_{P} = -(\cancel{\pi - \pi^e})^2 = 0$
$U^*_P = -(p-p)^2 = 0$
No empeora

R// Podemos concluir que el EN es subóptimo en este juego.

2. $(G, T = 100)$

No, porque por inducción hacia atrás todos los subjuegos van a ser idénticos al juego inicial con un único EN $\pi = \pi^e = p + ay^*$, y siempre va a haber mayores incentivos, así sea en el periodo 100, de desviarse al único EN del juego base. En este caso, el descuento del futuro sólo sería una transformación monotónica de los pagos, y no garantiza la coordinación efectiva afuera del EN.

3. $(G, T = \infty)$

Estrategia desencadenante: $\begin{cases} t = 1, & \pi = \pi^e = p \\ t > 1, & \begin{cases} \pi = \pi^e = p, \text{ si no hay desv. previas} \\ \pi = \pi^e = p + ay^* \text{ d.l.c.} \end{cases} \end{cases}$

- Subjuegos con desviaciones previas (I)

$V_{BC,1} \to \max \; -(\pi - p)^2 - a(\pi - \pi^e - y^*)^2 + \delta V_{i,1}$

$V_{BC,1} = \dfrac{-(\pi - p)^2 - a(\pi - \pi^e - y^*)^2}{1-\delta} = \dfrac{-(\cancel{p} + ay^* - \cancel{p})^2 - a(-y^*)^2}{1-\delta} = \boxed{\dfrac{-(a^2y^2_*) - ay^2_*}{1-\delta}}$ ③

$V_{P1} = \max \dfrac{-(\pi^e - \pi)^2}{1-\delta} = \boxed{0}$ ④ $\to$ ¿será $(\pi = \pi^e = ay^* + p)$ E.N. en (I)

③ $\to$ ④ : como los sj tipo I son idénticos a G, sólo que multiplicadas por $\frac{1}{1-\delta}$, el EN será el mismo.

$E.N: \pi = \pi^e = p + ay^*$

- Subjuegos sin desviaciones previas (II):

¿Será $\pi = \pi^e = p$ ~~$+ay^*$~~ E.N. en II?

→ Si $\pi = \pi^e = p$

$V_{BC2} = -0^2 - a(y^*)^2 + \delta V_{BC2}$

$V_{BC2} = \boxed{\frac{-a(y^2)}{1-\delta}}$ (5)

→ Si $\pi^e = p, \pi \neq p$:

$V_{BC,2}$: Max $-(\pi-p)^2 - a(\pi - p - y^*)^2 + \underbrace{\delta V_{BC1}}_{\text{constante}}$

$C.P.O = -\cancel{2}(\pi - p) - \cancel{2}a(\pi - p - y^*) = 0$

$\Rightarrow \pi - p = a(p + y^* - \pi)$

$\pi + a\pi = p + ap + ay^*$

$\pi = \frac{p(a+1) + ay^*}{1+a}$

$\rightarrow V_{BC2} = -\left[\frac{p(1+a) + ay^*}{1+a} - p\right]^2 - a\left[\frac{p(1+a) + ay^*}{1+a} - p - y^*\right]^2 + \delta (3)$

$= \frac{-a^2y^{*2}}{(1+a)^2} - \frac{a}{(a+1)}[ay^* - y^* - ay^*]^2 + \delta (3)$

$= \frac{-a^2y^{*2}}{(1+a)^2} - \frac{a(y^*)^2}{(a+1)^2} + \delta (3) = \frac{-1}{(1+a)^2}(a^2y^{*2}) + ay^{*2}) - \frac{\delta(a^2y^2 + ay^{*2})}{1-\delta}$

$V_{BC,2} = -\frac{1}{(1+a)^2}(ay^{*2})(a+1) - \frac{\delta}{1-\delta}(a^2y^{*2} + ay^{*2}) = \frac{-ay^{*2}}{1+a} - \frac{\delta}{1-\delta}(ay^{*2})(a+1)$

$= \boxed{-ay^{*2}\left(\frac{1}{1+a} - \frac{\delta}{1-\delta}(1+a)\right)}$ (6) → Para que $\pi = p$ sea MR del BC a $\pi^e = p$, (5) ≥ (6)

$\Rightarrow \frac{-ay^{*2}}{1-\delta} \geq -ay^{*2}\left[\frac{1}{1+a} + \frac{\delta}{1-\delta}(1+a)\right]$

$$\frac{1}{1-\delta} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{\delta}{1-\delta}(1+a)$$

$$\frac{1}{\cancel{1-\delta}} \geq \frac{1-\delta-\delta(1+a)^2}{(1+a)\cancel{(1-\delta)}}$$

$$1 \geq \frac{1-\delta(\cancel{1-1}+2a-a^2)}{1+a}$$

$$1+a \geq 1-\delta a(2-a)$$

$$\cancel{a} \geq -\delta\cancel{a}(2-a)$$

$$\frac{1}{2-a} \geq -\delta$$

$$\boxed{\delta \geq \frac{1}{2+a}}$$

→ Para que el BC tenga como mejor respuesta a $\pi^e = p$, $\pi = p$, δ tiene que comportarse de esta forma.

→ Ahora, para el público en subjuegos tipo (II):

*Si $\pi^e = 0$ fuera Mejor Respuesta a II:
en (II):

$$V_{p2} = 0 + \delta V_{p2}$$

$$\boxed{V_{p,2} = 0}$$

*Si $\pi^e \neq p$ fuera MR del público a $\pi = 0$ en (II):

$$V_{p2} = \max \; -(\cancel{\pi^e - \pi}^{\to 0})^2 - \delta \cancel{V_{p,1}}^{\to 0}$$

$$\frac{\partial V_{p2}}{\partial \pi^e} = -2(\pi^e) = 0$$

$$V_{p,2} = \pi^e = 0$$

→ si $\pi = 0$ en (II), el público no se desvía de $\pi^e = p$.

$\pi^e = p$ sí es MR de $\pi = p$ en (II).

R// Esta estrategia desencadenante es EPS si

$$\delta \geq \frac{1}{2+a}.$$