Teoría de Juegos
Prof. Mauricio Romero
Taller preparación 1 - 13 de Julio de 2013

Nota 1: Debe devolver este enunciado y todas las hojas que le entreguen.
Nota 2: Está prohibido el uso de calculadora y de celular.
Nota 3: Puede usar todo los teoremas vistos en clase, siempre y cuando mencione las hipótesis que el teorema debe cumplir y justifique que las hipótesis se cumplen.

1. Considere un juego donde dos jugadores eligen simultáneamente un número entre cero y veinte. Los pagos de cada jugador están dados por

$$u_1(x, y) = 2xy - x^2$$

$$u_2(x, y) = 4xy - y^2$$

   (a) Calcule y grafique la función de mejor respuesta de cada jugador.

   (b) Es este juego soluble por medio de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas? Si su respuesta es "si" muestre cual es la solución, si su respuesta es "no" justifíquelo.

2. Dos alumnos de la materia de Teoría de Juegos estudiaron juntos para un examen. Como Josefina y Juan eran muy amigos, antes de entrar al parcial habían arreglado que si aparecía un ejercicio complicado, ninguno lo resolvía y de esa forma subían un poco la curva y terminaban los dos con buena nota. Si ninguno de los dos contestaba, entonces ambos obtienen un punto. Si los dos contestan obtienen 2 puntos cada uno. Si sólo uno Juan contesta, obtiene 3 puntos y el otros obtiene cero.

   (a) Plantee una matriz de pagos, y encuentre los equilibrios de Nash (Incluidos los equilibrios en estrategias mixtas).

   (b) Es creíble el acuerdo que hicieron antes de entrar al examen?

3. Suponga que en un bosque viven dos familias, cada una de las cuales es dueña de la mitad del bosque. Se avecina la temporada de tala y cada familia debe decidir qué proporción de los árboles de su terreno va a cortar. Su función de utilidad tiene un componente que es creciente en su consumo de árboles (es decir, creciente en la proporción de árboles que corta). Por otra parte, la utilidad de cada familia también se ve negativamente afectada por la tala total en el bosque, dado el efecto negativo que tiene sobre la fauna de la cual se alimentan. Expresando como c_1 el consumo de árboles de la familia 1 y c_2 el de la familia 2, esto se resume en las siguientes funciones de utilidad:

$$U_1 = \ln(c_1) - c_1 - c_2$$

$$U_2 = \ln(c_2) - c_1 - c_2$$

   (a) Encuentre el equilibrio o equilibrios de Nash de este juego en estrategias puras. Sea claro en presentar el procedimiento que siguió.

(b) Ecuentre las cantidades de c_1 y c_2 que maximizan el bienestar social.

(c) Coincide el equilibrio de Nash con el optimo social? Es esto un contra ejemplo al primer teorema del bienestar. Justifique.

4. Dos inversores, i y j, han depositado cada uno de ellos una cantidad D en un banco. El banco ha invertido estos depósitos en un proyecto que puede durar dos períodos. Los inversores pueden sacar su dinero del banco en cualquiera de los períodos, pero en cada período cada inversor toma su decisión sin conocer la decisión del otro inversor del mismo período (Es decir juegan en forma simultánea).

   Si ambos inversores retiran su dinero en el período 1, los dos reciben r, donde $2r < D$, y el juego termina. Si solo un inversor saca dinero en el período 1, ese inversor recibe D, el otro recibe $2r - D$ y el juego se acaba. Finalmente, si ninguno de los inversores saca dinero en el período 1 el juego pasa al período 2. Si los dos inversores sacan su dinero en el período 2, cada uno recibe R, con $R > D$ y el juego acaba. Si solo un inversor saca su dinero en el período 2, ese inversor recibe $2R - D$, y el otro recibe D y el juego acaba. Finalmente, si ninguno de los dos inversores saca su dinero en el período 2, el banco devuelve R a cada uno y el juego se acaba.

   (a) Representa este juego en forma extensiva

   (b) ¿Que equilibrios de Nash tiene el subjuego que empieza en el período 2?

   (c) ¿Que equilibrios perfectos en subjuegos tiene el juego completo?

5. Imagínese la siguiente situación. Ana, Bart y Carolina hicieron su examen de teoría de juegos y sacaron 0, 2.5 y 5 respectivamente. Desafortunadamente, a Mauricio se le olvido poner las notas en su archivo de Excel. Mauricio se acuerda que una persona saco cero, otra saco 2.6 y otra saco 5 pero no se acuerda quien saco que. Mauricio le da la siguiente opción a los tres estudiantes. Cada uno pueden devolverle el parcial en cuyo caso el simplemente le asigna la nota correcta a esa persona o pueden no devolverle el parcial en cuyo caso Mauricio le asigna a todas las personas que no devolvieron el parcial el promedio de las notas que fueron asignadas a nadie. Por ejemplo, si nadie devuelve el parcial todos quedan con una nota de 2.5. Si Ana devuelve el parcial, pero Bart y Carolina no, ella queda con cero y Bart y Carolina con 3.75. Suponga que todos los estudiantes deben decidir simultáneamente si devolver el parcial o no. Cada estudiante busca maximizar la nota final de la clase.

   (a) Dibuje la forma extensiva de este juego y la forma normal.

   (b) Existe un equilibrio donde todos los individuos devuelven el parcial? Justifique su respuesta.

   (c) Que estrategias son estrictamente dominadas para Carolina?

   (d) Que estrategias son estrictamente dominadas para Bart?

   (e) Describa un equilibrio de Nash el juego donde no todos los individuos devuelven su parcial.

   (f) Explique intuitivamente el resultado de este juego.

6. Pepito Pérez, Fulanito de Tal y Jhon Doe van a dividirse un dólar entre ellos. Pepito Pérez ofrece primero una porción F a Fulano de Tal y una porción J a Jhon Doe, quedándose el

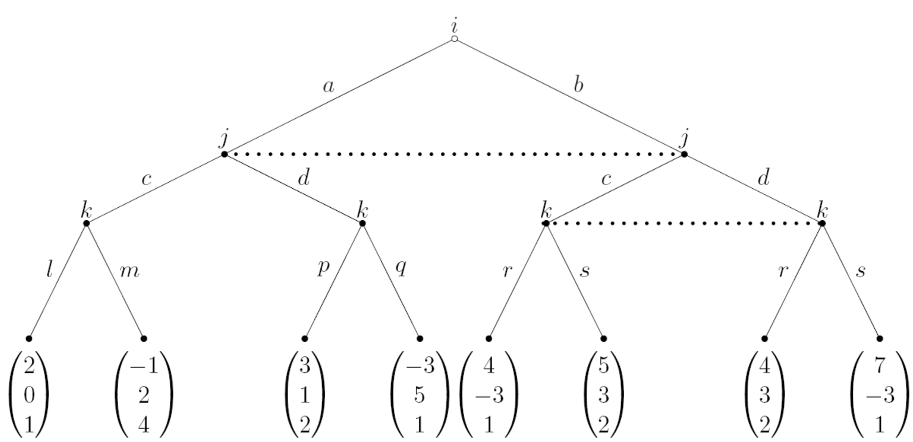
con una porción P del dólar. (De forma que F+J+P=1). Si ambos aceptan se cierra el trato y se dividen el dólar como propuso Pepito. Si Fulanito de Tal o Jhon Doe rechazan la oferta entonces es el turno de Fulanito de Tal de hacer una oferta a Pepito y Jhon. Si ambos aceptan el juego se acaba y se dividen el dólar como propuso Fulano. Si alguno rechaza la oferta entonces es el turno de Jhon de hacer una oferta, Fulano y Pepito aceptan se acaba el juego y se dividen el dólar como propuso Jhon. Si alguno rechaza se acaba el juego y todos obtienen \$0. Sin embargo, el valor presente de un dólar de mañana es de $\delta < 1$. Muestre que existe un equilibrio perfecto de subjuegos, donde se llega a un acuerdo en el primer periodo y diga cuál es.

7. Suponga que ud esta tratando de comprar una casa y esta regateando con el vendedor. La casa avale 200 millones de pesos para ud y para el vendedor vale 100 millones, de tal manera que cualquier precio entre 100 y 200 millones los deja a los dos felices. El regateo sucede por medio de un modelo de oferta y contraoferta en 10 periodos (es decir se hacen máximo 10 ofertas y 10 veces se aceptan o rechazan esas ofertas). Si al final de diez periodos no se llega a un acuerdo, entonces el vendedor deja de contactarlo a ud y los dos pierden la oportunidad de un trato. Suponga que ud y el vendedor tienen un factor de descuento $\delta < 1$. El agente de bienes raíces a permitido que ud decide si hace la primera oferta o deja que el vendedor haga la primera oferta.

   (a) Suponga que $\delta < \frac{1}{2}$, ¿debería usted hacer la primera oferta?

   (b) Suponga que $\delta^9 > \frac{1}{2}$, ¿debería usted hacer la primera oferta?

8. Para el siguiente juego,



   (a) Hallar para cada jugador el conjunto de sus acciones y el conjunto de sus estrategias.

   (b) ¿Cuantos subjuegos hay en este juego? Dibujar todos los subjuegos.

   (c) Hallar todos los equilibrios perfectos en subjuegos.

9. Considere el siguiente juego en forma normal.

	X	Y
A	5,6	0,0
B	8,2	2,2

   (a) Suponga que el juego se repite dos veces. Existe un equilibrio perfecto en subjuegos donde se juegue (A, X) en el primer periodo? Justifique su respuesta.

   (b) Ahora suponga que el juego se repite al infinito con un factor de descuento δ. Existe un equilibrio perfecto en subjuegos donde se juego (A, X) en todos los periodos? Si es así, describa que condiciones se deben imponer sobre δ.

Hasta aquí es la duración aproximada del parcial. Pongo mas ejercicios para que practiquen mas!

10. Suponga la siguiente interacción entre el Banco de la República, que controla la inflación, y el Público, que controla la inflación esperada. El Banco de la República busca controlar la inflación (Su objetivo según la constitución colombiana) y que el PIB no se desvié de un nivel objetivo, lo anterior se ve reflejado en la siguiente función de utilidad.

$$U_{BR} = -\pi^2 - \beta(Y - \overline{Y})$$

Donde π es la inflación, Y es el PIB y $\overline{Y}$ es el nivel objetivo del PIB y β es un parámetro. El público a su vez prefiere que la inflación no se desvié de la inflación esperada y que no haya inflación, esto se ve reflejado en la función de utilidad del público la cual es:

$$U_p = (\pi - \pi_e)^2 - \pi$$

Donde π_e es la inflación esperada. Finalmente suponga que en la economía se da la siguiente relación: $y = \pi - \pi_e$. Proveniente de una curva de Phillips.

   (a) Encuentre las funciones de reacción para cada jugador.

   (b) ¿Cual(es) seria(n) los equilibrios de Nash de este juego?

   (c) Demuestre que si $\pi = \pi_e = 0$ se llega a pagos mayores que aquellos del Equilibrio de Nash.

   (d) Intuitivamente que tiene que ver el parámetro β con el resultado encontrado en la parte C y D.

11. Suponga una firma que puede producir un bien a cualquier calidad $q \in [0, 1]$. Si los consumidores esperan una calidad q^e la función de demanda esta dada por $x = 4 + 6q^e - p$.

Suponga que la firma conoce esta función de demanda y toma q^e como dado, pero puede decidir la calidad ofrecida q. La firma no tiene costos fijos, y el costo de producir una unidad del bien de calidad q es $2 + 6q^2$. En cada periodo $t = 1, 2, 3, \ldots$. La firma elige el nivel de calidad q y el precio p. Los consumidores observan este precio pero no conocen la calidad del producto sino hasta que es comprado. Los consumidores siguen una estrategia desencadenante de manera que compran el producto si en todos los periodos anteriores $q \geq q^e$, y no compran nunca mas de la firma si alguna vez $q < q^e$.

(a) Si la firma tiene un factor de descuento $\delta = 0.9$, para que niveles de q^e es viable un equilibrio de reputación, es decir un equilibrio en el que la firma produce bienes con calidad q^e en cada periodo.

(b) Si los consumidores conocen la función de costos de la firma y el factor de descuento y anticipan la calidad q^e que maximiza los beneficios de la firma, muestre que el nivel de equilibrio de q^e es 0.5 y que este es un equilibrio de reputación

12. Considere el modelo de ofertas alternadas para dividir un dólar en máximo T periodos donde los agentes tienen un factor de descuento δ_1 y δ_2. Los jugadores se toman turnos haciendo ofertas y si alguno acepta el juego se acaba y el dólar se divide de acuerdo a la oferta aceptada. Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos de esta situación. Si lo encuentra mas fácil primero analice el juego para $T = 1$,$T = 2$,$T = 3$ y $T = 4$ y generalice. Qué pasa cuando T tiende a infinito?