

**Teoría de Juegos**  
**Prof. Mauricio Romero**  
**Parcial 1 - 10 de Julio de 2014**

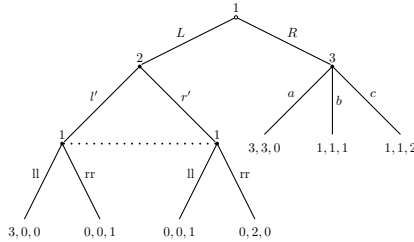
**Nota 1:** Debe devolver este enunciado y todas las hojas que le entreguen.

**Nota 2:** Está prohibido el uso de calculadora y de celular.

**Nota 3:** Puede usar todo los teoremas vistos en clase, siempre y cuando mencione las hipótesis que el teorema debe cumplir y justifique que las hipótesis se cumplen.

**Nota 4:** Todos los puntos valen lo mismo. La nota del examen será el número total de puntos que consigna multiplicado por 5/7. (i.e.  $5 \frac{\text{Puntos}}{7}$ )

1. **1 punto** Considere el siguiente juego en forma extensiva



- 0.3 puntos** Represente el juego en la forma normal.
- 0.1 puntos** ¿Cuántos subjuegos tiene el juego original?
- 0.3 puntos** ¿Cuál es el equilibrio perfecto en subjuegos?
- 0.3 puntos** ¿Existe un equilibrio de Nash que no sea equilibrio perfecto en subjuegos? Justifique y en caso de que exista diga porque no tiene sentido dicho equilibrio.

2. **1 punto** Considere el siguiente juego estático. Cinco estudiantes ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) deciden simultáneamente cuantas horas dedicar al taller de Teoría de Juegos (que es en grupo). Cada jugador elige un número de horas  $s_i \in [0, 10]$ . La nota final del taller es directamente proporcional al número de horas totales que le dedican al taller pero incurre en un costo relacionado con el número de horas que le dedico, i.e.:

$$U_i(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 - \frac{s_i^2}{2}$$

- 0.4 puntos** ¿Es este juego soluble por eliminación iterada de estrategia estrictamente dominadas? Justifique su respuesta
- 0.2 puntos** Calcule todos los equilibrios de Nash del Juego en estrategias puras
- 0.2 puntos** Calcule el óptimo social del juego (definido como  $\sum_{i=1}^5 U_i$ ) y explique por qué es diferente del equilibrio de Nash

3. **1 punto** Suponga que dos vendedores de paletas están decidiendo donde ubicarse a lo largo de la ciclovía de la 7ma. Los vendedores de paletas sólo se pueden ubicar en cinco locales equidistantes reservados para ellos. El local 1 es el que se encuentra más al sur y el 5 el que se encuentra más al norte. Hay 25 personas ubicadas en el sector de cada local y cada persona le compra una paleta al vendedor más cercano a ella. Por ejemplo, si el primer paletero se ubica en el local 2 y el segundo paletero en el local 3, entonces el primero recibe 50 clientes (25 del sector 1 y 25 del sector 2) y el segundo recibe 75 (los clientes de los sectores 3, 4 y 5). Suponga que si un sector es equidistante entre los dos paleteros, entonces la mitad de los clientes se va a donde el primer paletero y la mitad a donde el segundo y que si los dos paleteros están en el mismo sector entonces se dividen el mercado entre los dos en partes iguales (es decir cada uno queda con 62.5 clientes).

- 0.1 puntos** Describas las estrategias de cada jugador
- 0.6 puntos** ¿Es este juego soluble por eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas?

- (c) **0.3 puntos** Describa el conjunto de equilibrios de Nash de este juego
4. **1 punto** Suponga que el partido de la final del mundial se va a penaltis. Cada tiro penal se puede modelar como una situación estratégica entre el portero y el pateador, donde cada uno tiene dos opciones. El pateador puede disparar hacia la derecha o hacia la izquierda. De manera similar el portero puede tirarse hacia la derecha o hacia la izquierda. Suponga que el pateador es diestro y por ende le queda más fácil meter gol si dispara hacia la izquierda, por lo cual la probabilidad de meter gol si ambos eligen irse por la derecha es 0.4, si ambos eligen irse por la izquierda es 0.6, si el arquero va hacia la izquierda y el pateador hacia la derecha entonces es 0.8, y si el arquero va hacia la derecha y el pateador hacia la izquierda es 0.9. Suponga que el pago para el pateador es igual a la probabilidad de meter gol y el pago para el arquero es igual a la probabilidad de que no haya gol.
- (a) **0.2 puntos** Represente el juego en la forma normal.
- (b) **0.2 puntos** Represente el juego en la forma extensiva.
- (c) **0.3 puntos** Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras.
- (d) **0.3 puntos** Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.
5. **1 punto** En una industria con tres firmas, una de ellas es la “líder” y compiten de la siguiente manera. Primero la firma “líder” elige una cantidad a producir  $q_1$ , y después las otras dos firmas eligen simultáneamente cantidades  $q_2$  y  $q_3$ . Todas las firmas tienen el mismo costo marginal  $c$  y se enfrentan a una curva de demanda  $P = a - Q$ , donde  $Q = q_1 + q_2 + q_3$ .
- (a) **0.6 puntos** ¿Cuál es el EPS de este juego? Justifique su respuesta y no olvide que un equilibrio es un perfil de estrategias para cada jugador y no un perfil de acciones.
- (b) **0.4 puntos** Encuentre un equilibrio de Nash que no sea un EPS. Explique por qué dicho equilibrio de Nash es “ilógico”.
6. **1 punto** Ana, Bernardo y Carlos se encuentran una lámpara encantada. El genio de la lámpara les ofrece un kilo de oro pero les dice que deben dividirlo entre ellos de la siguiente manera: En el primer periodo Ana hace una oferta (que proporción del kilo de oro se queda cada uno) y entonces Bernardo y Carlos deciden si aceptarla o rechazarla (simultáneamente). Si ambos aceptan, el juego acaba y se dividen el kilo de oro de acuerdo a la oferta. Si al menos un jugador rechaza, Bernardo hace una oferta de nuevo y entonces Ana y Carlos deciden si aceptar o rechazar (simultáneamente). Si los dos aceptan, el juego acaba. Si alguno de los dos rechaza, entonces Carlos hace una contraoferta. Si ambos aceptan, el juego acaba y se dividen el kilo de oro de acuerdo a la oferta. Si al menos un jugador rechaza se quedan sin el kilo de oro pues el genio se enfurece por no ponerse de acuerdo. El factor de descuento es  $\delta_a$ ,  $\delta_b$  y  $\delta_c$  para Ana, Bernardo y Carlos respectivamente.
- (a) **0.5 puntos** Encuentre un equilibrios perfecto en subjuegos donde llegan a un trato en el primer periodo y diga cuál es el resultado de este equilibrio (i.e. con que proporción del kilo de oro se queda cada uno).
- (b) **0.1 puntos** Si  $\delta_a = 0$ , ¿Qué sucede con la proporción del kilo de oro que se queda cada uno? De una intuición a este resultado.
- (c) **0.1 puntos** Si  $\delta_b = 0$ , ¿Qué sucede con la proporción del kilo de oro que se queda cada uno? De una intuición a este resultado.
- (d) **0.1 puntos** Si  $\delta_c = 0$ , ¿Qué sucede con la proporción del kilo de oro que se queda cada uno? De una intuición a este resultado.
- (e) **0.2 puntos** Compare los resultados de los numerales  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Provea algún tipo de intuición sobre las diferencias y similitudes.
7. **1 punto** Considere el siguiente juego en forma normal. Suponga que el factor de descuento es  $\delta < 1$  para ambos jugadores.

	D	E	F
A	2,2	2,1	-2,0
B	1,2	1,1	-1,0
C	0,-2	0,-1	-1,-1

- (a) **0.1 puntos** Suponga que el juego se repite  $T$  veces ( $T$  finito). ¿Existe un equilibrio perfecto en subjuegos donde se juegue  $(E, B)$  en todos los periodos?
- (b) **0.2 puntos** Suponga que el juego se repite 2 veces. ¿Existe un equilibrio perfecto en subjuegos donde se juegue  $(E, B)$  en el primer periodo?
- (c) **0.4 puntos** Suponga que el juegos se repite infinitas veces. ¿Existe un equilibrio perfecto en subjuegos donde se juegue  $(E, B)$  en todos los periodos? Diga qué condiciones se deben imponer para que el equilibrio exista.
- (d) **0.1 puntos** Indique alguna situación de la vida diaria donde existe un resultado como el del numeral anterior.
- (e) **0.2 puntos** Discuta el resultado del numeral anterior y compárelo con el resultado que habíamos visto en clase donde se podían alcanzar pagos mayores a los del equilibrio de Nash cuando el juego se repetía infinitamente.
8. **Bono: 0.5 punto** Suponga que tiene  $n$  firmas compitiendo al estilo Cournot en un mercado y que todas tienen el mismo costo marginal  $c$ . Las firmas se enfrentan a una curva de demanda  $P = a - Q$ , donde  $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$  y la firma  $i$  elige  $q_i$ .
- (a) **0.2 puntos** Encuentre el equilibrio de Nash de este juego
- (b) **0.1 puntos** Encuentre el precio de este mercado y las ganancias de las firmas en el equilibrio de Nash
- (c) **0.3 puntos** ¿Que sucede con el precio y las ganancias cuando cuando  $n \rightarrow \infty$ ? Explique la intuición de este resultado y su relación con el equilibrio en un mercado competitivo