# Teoría de Juegos
# Prof. Mauricio Romero
# Parcial 2 - 23 de Julio de 2014

**Nota 1: Debe devolver este enunciado y todas las hojas que le entreguen.**
**Nota 2: Está prohibido el uso de calculadora, de celular, tabletas, etc.**
**Nota 3: Puede usar todo los teoremas vistos en clase, siempre y cuando mencione las hipótesis que el teorema debe cumplir y justifique que las hipótesis se cumplen.**
**Nota 4: Todos los puntos valen lo mismo. La nota del examen será el número total de puntos multiplicado por 5/7. (i.e. $5\frac{Puntos}{7}$)**

1. **1 punto** Dos personas invierten simultáneamente en un negocio, donde la inversión puede ser cualquier número no negativo. Si la persona $i$ invierte $x_i$ y la persona $-i$ invierte $x_{-i}$ la utilidad del negocio para el individuo $i$ es

$$u_i = \theta_i x_i x_{-i} - x_i^3$$

$\theta_i$ es conocido por el individuo $i$ pero no por su contrincante, quien solo sabe que $\theta_i$ se distribuye uniforme entre cero y uno i.e. $\theta_{-i} \sim U[0,1]$. Encuentre un equilibrio Bayes-Nash donde la regla de decisión toma la forma $x_i = a + b\sqrt{\theta_i}$.

2. **2 puntos** Suponga que el gobierno quiere comprar una dotación de esferos para todos los empleados públicos. Con el fin de hacer las cosas de manera transparente (en una Urna de Cristal como dirían por ahí) hace una licitación publica donde cada empresa que entre a participar en la licitación ofrece el precio ($p_i$) al cual está dispuesta a proveer al gobierno de todos los esferos que necesita. Cada empresa que entra a la licitación tiene un costo total de producir dichos esferos que es desconocido por las demás empresas, aunque todo el mundo sabe que el costo de cada empresa está distribuido uniforme entre cero y uno (i.e. $c_i \sim U[0,1]$). Al final solo dos empresas se presentaron a la licitación. El gobierno está decidiendo entre dos esquemas de licitación. El primero, donde la empresa que ofrezca el precio más bajo se queda con el negocio y el gobierno le paga el precio que oferto. La segunda donde la empresa que ofrezca el precio más bajo se queda con el negocio, pero le paga el precio de la otra empresa (es decir el precio más alto dado que solo hay dos empresas). Note que las ganancias de las empresas son iguales al precio que le paga el gobierno menos su costo, mientras que el gobierno lo que quiere es pagar el precio más bajo para ahorrar recursos públicos (que son sagrados!).

   (a) **1 punto** Suponga que el gobierno decide usar el esquema donde la empresa que ofrezca el precio más bajo se queda con el negocio y el gobierno le paga el precio que oferto.

      i. **0.25 puntos** Encuentre la utilidad esperada de la empresa $i$ si oferta un precio $a$ y tiene un costo de $c_i$ y el oponente sigue la regla de decisión $b(c) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}$.

      ii. **0.25 puntos** Encuentre cual es la oferta óptima para la firma $i$ si tiene un costo de $c_i$.

      iii. **0.25 puntos** Utilice la información del numeral anterior para encontrar la forma funcional un equilibrio Bayes-Nash simétrico.

      iv. **0.25 puntos** ¿Cuál es el precio esperado que el gobierno espera pagar bajo este esquema?

   (b) **0.75 punto** Suponga que el gobierno decide usar el esquema donde la empresa que ofrezca el precio más bajo se queda con el negocio, pero le paga el precio de la otra empresa.

      i. **0.25 puntos** Demuestre que ofertar el costo de producción domina débilmente a todas las demás reglas de decisión sin importar cuantos jugadores existan ni cuál es la distribución de la valoración de los jugadores.

      ii. **0.25 puntos** Encuentre un equilibrio de Bayes-Nash de este juego. Justifique.

      iii. **0.25 puntos** ¿Cuál es el precio esperado que el gobierno espera pagar bajo este esquema?

(c) **0.25 puntos** ¿Cuál de las dos subastas le recomendaría usted al gobierno basado en los resultados anteriores? Justifique su respuesta.

3. **1 punto** El país de "La Nueva Granada" lleva varios años sumergido en un conflicto interno entre el gobierno y las guerrillas comunistas de las FAR. Las FAR han enviado comunicaciones al gobierno donde expresan su deseo de hacer un proceso de paz. El gobierno de Jaime Miguel Soto (JMS) esta decidiendo entre aceptar la propuesta y empezar un proceso de paz (P) o rechazar la propuesta y seguir en una guerra de guerrillas indefinidamente (G). Las FAR pueden estar cansadas de la guerra y buscar la paz o pueden simplemente querer pretender colaborar con el gobierno en un proceso de paz para ganar reputación internacional y obtener unas vacaciones en Cuba (país donde se realizara el proceso de paz). La secuencia de eventos es la siguiente: primero las FAR puede hacer un gesto de buena voluntad (V) o no (N), después el gobierno habiendo observado lo que hizo la guerrilla (sin saber si la guerrilla quiere la paz o no), decide si empezar el proceso de paz (P) o seguir en guerra (G). Suponga que hace un proceso de paz solamente da frutos si la guerrilla quiere la paz en realidad y por ende ambos individuos obtienen una utilidad de 10. Si se hace un proceso de paz con una guerrilla que no quiere la paz entonces al final el gobierno pierde reputación y obtiene una utilidad de -5, mientras que la guerrilla obtiene 10 unidades (por sus vacaciones en Cuba). Por último, si se hace la guerra ambos jugadores obtienen una utilidad de -3. Finalmente, realizar un gesto de buena voluntad tiene un costo de $C$ para la guerrilla.

   (a) **0.1 puntos** Represente este juego en forma extensiva

   (b) **0.3 puntos** Suponga que $C = 2$. Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos. ¿Cuáles de estos equilibrios son separadores y cuales son agrupadores?

   (c) **0.3 puntos** Suponga que $C = 10$. Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos. ¿Cuáles de estos equilibrios son separadores y cuales son agrupadores?

   (d) **0.3 puntos** Interprete sus resultados de los dos numerales anteriores a la luz de la polarización actual que hay en el país con respecto al proceso de paz.

4. **1 punto** Suponga que dos jugadores se enfrenten, pero mientras que para el jugador dos es claro quién es el jugador 1, el jugador 1 no sabe si se enfrenta a un jugador dos cuyo nombre empieza por $a$ o cuyo nombre empieza por $b$. Los pagos dependiendo de quién sea el jugador dos están representados abajo. Suponga que un cuarto de las personas en el mundo tienen un nombre que empieza por "a" y tres cuartos un nombre que empieza por "b".

| $1\backslash 2.a$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 4,2 | 0,1 |
| $M$ | 3,0 | 1,1 |
| $B$ | 2,4 | 3,3 |

| $1\backslash 2.b$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 0,1 | 0,2 |
| $M$ | 1,1 | 9,1 |
| $B$ | 3,2 | 4,1 |

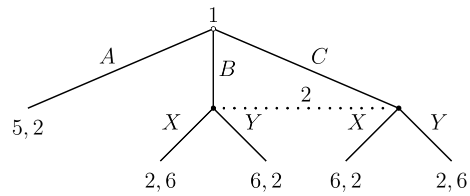
   (a) **0.1 puntos** Cuantos tipos hay para cada jugador.

   (b) **0.1 puntos** Como es una regla de decisión para cada jugador

   (c) **0.8 puntos** Encuentre el (los) equilibrio Bayes-Nash de este juego.

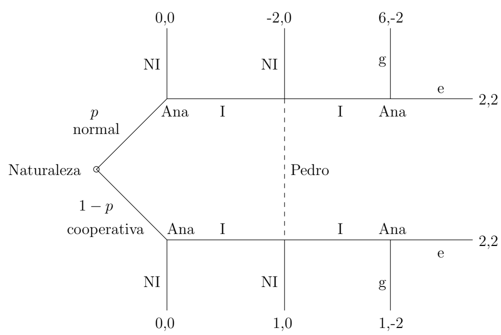
Puede elegir entre el punto 5 y el punto 7 (Solo debe hacer uno de los dos). Para ayudarlo a elegir... le anticipo que aunque el punto cinco se ve mas fácil tiene equilibrios en estrategias mixtas). Únicamente calificare uno de los dos puntos.

5. **1 punto** Considere el siguiente juego:




(a) **1 punto** Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos.

6. **1 punto** Considere el siguiente juego. Los pagos van $(U_{Ana}, U_{Pedro})$:




(a) **1 punto** Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos si $p = \frac{1}{4}$.

7. **Bono de 1** Considere una subasta de dos firmas petroleras por el derecho a extraer petroleo de un pozo. Cada firma envía un ingeniero antes de la subasta para determinar la capacidad del pozo. Cada ingeniero reporta a su empresa que el pozo tiene capacidad $s_i$. Es decir el ingeniero de la primera empresa reporta a dicha empresa $s_1$ y el ingeniero de la segunda empresa reporta $s_2$ a dicha empresa. Cada empresa conoce lo que reporta su ingeniero pero no lo que reporta su contrincante. Sin embargo, ambas empresas saben que lo que reporta el ingeniero de su contrincante es una variable aleatoria que se distribuye uniforme entre $s_{-i} \sim [0, 1]$. Ambos ingenieros cometen errores al calcular la capacidad del pozo y dicha es en realidad $s_1 + s_2$ y ambas firmas saben que ese es el valor real del pozo.

   **0.25 puntos** Demuestre que en una subasta de primer precio pujar el reporte del ingeniero es un equilibrio Bayes-Nash

   **0.25 puntos** Demuestre que en una subasta de segundo precio pujar el doble del reporte del ingeniero es un equilibrio Bayes-Nash

   **0.25 puntos** Demuestre la ganancia esperada para las firmas es la misma sin importar la subasta

   **0.25 puntos** ¿ Cual es el valor esperado del pozo? Compare este valor con la ganancia esperada para cada una de las firmas cuando gana la subasta. Comente este resultado