Teoría de Juegos
Prof. Mauricio Romero
Parcial 2 - 23 de Julio de 2014

<u>Nota 1</u>: Debe devolver este enunciado y todas las hojas que le entreguen.
<u>Nota 2</u>: Está prohibido el uso de calculadora y de celular.
<u>Nota 3</u>: Puede usar todo los teoremas vistos en clase, siempre y cuando mencione las hipótesis que el teorema debe cumplir y justifique que las hipótesis se cumplen.
<u>Nota 4</u>: Todos los puntos valen lo mismo. La nota del examen será el número total de puntos multiplicado por 5/7. (i.e. $5\frac{Puntos}{7}$)

1. **1 punto** Dos personas invierten simultáneamente en un negocio, donde la inversión puede ser cualquier número no negativo. Si la persona i invierte x_i y la persona $-i$ invierte x_{-i} la utilidad del negocio para el individuo i es

$$u_i = \theta_i x_i x_{-i} - x_i^3$$

θ_i es conocido por el individuo i pero no por su contrincante, quien solo sabe que θ_i se distribuye uniforme entre cero y uno i.e. $\theta_{-i} \sim U[0,1]$. Encuentre un equilibrio Bayes-Nash donde la regla de decisión toma la forma $x_i = a + b\sqrt{\theta_i}$.

Solución:

Note que si mi contrincante sigue la regla de decisión $x_{-i} = a + b\sqrt{\theta_{-i}}$ entonces mi utilidad esperada seria

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}U &= \mathbb{E}\theta_i x_i (a + b\sqrt{\theta_{-i}}) - x_i^3 \\
\mathbb{E}U &= \theta_i x_i a + b\theta_i x_i \int_0^1 \sqrt{\theta_{-i}})d\theta_{-i} - x_i^3 \\
\mathbb{E}U &= \theta_i x_i a + b\theta_i x_i \frac{2}{3}\theta_{-i}^{\frac{3}{2}}|_0^1 - x_i^3 \\
\mathbb{E}U &= \theta_i x_i a + b\theta_i x_i \frac{2}{3} - x_i^3
\end{aligned}$$

Derivando con respecto a x_i e igualando a cero

$$\theta_i a + b\theta_i \frac{2}{3} - 3x_i^2 = 0$$

Y dado que en equilibrio yo sigo la misma regla de decisión que mi contrincante:

$$\begin{aligned}
\theta_i a + b\theta_i \frac{2}{3} - 3(a^2 + 2ab\sqrt{\theta_i} + b^2\theta_i) &= 0 \\
\theta_i a + b\theta_i \frac{2}{3} - 3a^2 - 6ab\sqrt{\theta_i} - 3b\theta_i &= 0 \\
\theta_i(a + b\frac{2}{3} - 3b^2)\theta_i - 6ab\sqrt{\theta_i} - 3a^2 &= 0
\end{aligned}$$

entonces $a = 0$, y $b = \frac{2}{9}$.

Otra explicación la pueden encontrar en `http://econweb.ucsd.edu/~mtromero/pdfs/TeoJuegos201319/Taller10Sol.pdf`

2. **2 puntos** Suponga que el gobierno quiere comprar una dotación de esferos para todos los empleados públicos. Con el fin de hacer las cosas de manera transparente (en una Urna de Cristal como dirían por ahí) hace una licitación publica donde cada empresa que entre a participar en la licitación ofrece el precio (p_i) al cual está dispuesta a proveer al gobierno de todos los esferos que necesita. Cada empresa que entra a la licitación tiene un costo total de producir dichos esferos que es desconocido por las demás empresas, aunque todo el mundo sabe que el costo de cada empresa está distribuido uniforme entre cero y uno (i.e. $c_i \sim U[0,1]$). Al final solo dos empresas se presentaron a la licitación. El gobierno está decidiendo entre dos esquemas de licitación. El primero, donde la empresa que ofrezca el precio más bajo se queda con el negocio y el gobierno le paga el precio que oferto. La segunda donde la empresa que ofrezca el precio más bajo se queda con el negocio, pero le paga el precio de la otra empresa (es decir el precio más alto dado que solo hay dos empresas). Note que las ganancias de las empresas son iguales al precio que le paga el gobierno menos su costo, mientras que el gobierno lo que quiere es pagar el precio más bajo para ahorrar recursos públicos (que son sagrados!).

   (a) **1 punto** Suponga que el gobierno decide usar el esquema donde la empresa que ofrezca el precio más bajo se queda con el negocio y el gobierno le paga el precio que oferto.

      i. **0.25 puntos** Encuentre la utilidad esperada de la empresa i si oferta un precio a y tiene un costo de c_i y el oponente sigue la regla de decisión $b(c) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}$

      Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_i(a,c_i)] &= P(a < b(c_{-i}))(a - c_i) \\
&= P(b^{-1}(a) < c_{-i})(a - c_i) \\
&= P(c_{-i} > b^{-1}(a))(a - c_i) \\
&= P(c_{-i} > b^{-1}(a))(a - c_i) \\
&= \left[1 - P(c_{-i} < b^{-1}(a))\right](a - c_i) \\
&= \left[1 - \frac{a - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right](a - c_i)
\end{aligned}$$

      ii. **0.25 puntos** Encuentre cual es la oferta (a) óptima para la firma i si tiene un costo de c_i.

      Solución:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[U_i(a,c_i)]}{\partial a} = -\frac{1}{\frac{1}{2}}(a - c_i) + \left[1 - \frac{a - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right] = 0$$

      entonces es el precio a que cumple

$$\frac{1}{k}(a - c_i) = 1 - \frac{a - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

      es decir

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_i$$

iii. **0.25 puntos** Utilice la información del numeral anterior para encontrar la forma funcional un equilibrio Bayes-Nash simétrico.

Solución: Dado que la mejor respuesta a que mi contrincante puje $b(c_{-i}) = \frac{1}{2}c_{-i} + \frac{1}{2}$ es pujar $b(c_i) = \frac{1}{2}c_i + \frac{1}{2}$
El equilibrio es donde cada jugador puja $b(c_i) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}$ pues nadie tiene incentivos a desviarse

iv. **0.25 puntos** ¿Cuál es el precio esperado que el gobierno espera pagar bajo este esquema?

Solución: El gobierno espera pagar el precio mas bajo entre los dos ofertantes... es decir:

$$\mathbb{E}[\min(b(c_1), b(c_2))] = \mathbb{E}[\min(\frac{c_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{c_2}{2} + \frac{1}{2})] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\min(c_1, c_2)] + \frac{1}{2}$$

por ende necesitamos la distribución del mínimo. Sea $Y = \min(c_1, c_2)$.

$$F_Y(a) = P(Y < a) = P(c_1 < a) + P(c_2 < a) - P(c_1 < a, c_2 < a) = 2a - a^2$$

$$f_y(a) = 2 - 2a$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}[\min(c_1, c_2)] + \frac{1}{2} = 2\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\int_0^1 y(2-2y)dy + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(y^2 - \frac{2}{3}y^3|_0^1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

(b) **0.75 punto** Suponga que el gobierno decide usar el esquema donde la empresa que ofrezca el precio más bajo se queda con el negocio, pero le paga el precio de la otra empresa.

i. **0.25 puntos** Demuestre que ofertar el costo de producción domina débilmente a todas las demás reglas de decisión sin importar cuantos jugadores existan ni cuál es la distribución de la valoración de los jugadores.

Solución:
Sea $\hat{b}$ la puja mas baja de los contrincantes. Si $c_i < \hat{b}$ con la puja c_i se gana la subasta. Pujando algo mas bajo no se cambian los pagos ni la probabilidad de ganar. Pujando algo mas alto, si se cae por encima de $\hat{b}$ se pierde la subasta.
Si $c_i > \hat{b}$ entonces se esta perdiendo la subasta con c_i y se gana cero, pero si se puja algo mas bajo y se gana entonces se paga $\hat{b}$ y se obtiene una utilidad negativa (pues seria $\hat{b} - c_i < 0$).
Por ende pujar c_i domina débilmente a todas las demás reglas de decisión.

ii. **0.25 puntos** Encuentre un equilibrio de Bayes-Nash de este juego cuando hay dos jugadores. Justifique.

Solución:
Es donde todo el mundo puja su costo de producción.

iii. **0.25 puntos** ¿Cuál es el precio esperado que el gobierno espera pagar bajo este esquema?
En este caso el gobierno espera ganar el precio mas alto entre los dos jugadores es decir

$$\mathbb{E}[\max(b(c_1), b(c_2))] = \mathbb{E}[\max(c_1, c_2)]$$

por ende necesitamos la distribución del mínimo. Sea $Y = \max(c_1, c_2)$.

$$F_Y(a) = P(Y > a) = P(c_1 > a)P(c_2 > a) = a^2$$

$$f_y(a) = 2a$$

Entonces

$$\mathbb{E}[\max(c_1, c_2)] = \mathbb{E}[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3} y^3|_0^1 = \frac{2}{3}$$

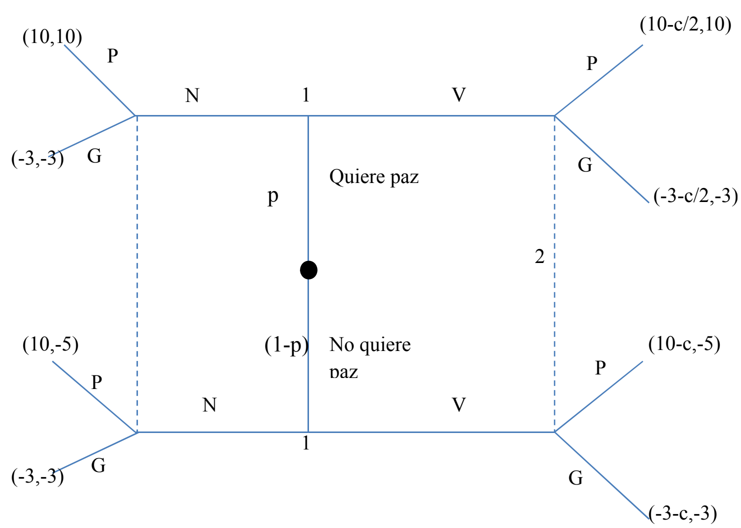
Por ende el precio que espera pagar la empresa es $\frac{2}{3}$

(c) **0.25 puntos** ¿Cuál de las dos subastas le recomendaría usted al gobierno basado en los resultados anteriores? Justifique su respuesta.

Solución: Ambas subastan le dan el mismo precio esperado al gobierno pero con la licitación de segundo precio le permite al gobierno extraer información sobre los costos de las empresas.

3. **1 punto** El país de "La Nueva Granada" lleva varios años sumergido en un conflicto interno entre el gobierno y las guerrillas comunistas de las FAR. Las FAR han enviado comunicaciones al gobierno donde expresan su deseo de hacer un proceso de paz. El gobierno de Jaime Miguel Soto (JMS) esta decidiendo entre aceptar la propuesta y empezar un proceso de paz (P) o rechazar la propuesta y seguir en una guerra de guerrillas indefinidamente (G). Las FAR pueden estar cansadas de la guerra y buscar la paz o pueden simplemente querer pretender colaborar con el gobierno en un proceso de paz para ganar reputación internacional y obtener unas vacaciones en Cuba (país donde se realizara el proceso de paz). La secuencia de eventos es la siguiente: primero las FAR puede hacer un gesto de buena voluntad (V) o no (N), después el gobierno habiendo observado lo que hizo la guerrilla (sin saber si la guerrilla quiere la paz o no), decide si empezar el proceso de paz (P) o seguir en guerra (G). Suponga que hace un proceso de paz solamente da frutos si la guerrilla quiere la paz en realidad y por ende ambos individuos obtienen una utilidad de 10. Si se hace un proceso de paz con una guerrilla que no quiere la paz entonces al final el gobierno pierde reputación y obtiene una utilidad de -5, mientras que la guerrilla obtiene 10 unidades (por sus vacaciones en Cuba). Por último, si se hace la guerra ambos jugadores obtienen una utilidad de -3. Finalmente, realizar un gesto de buena voluntad tiene un costo de C para la guerrilla si no quiere la paz y de $\frac{C}{2}$ si quiere la paz (pues, digamos liberar secuestrados no es tan costoso ya que al final se firmara la paz). Antes de observar el gesto de la guerrilla el gobierno cree que la guerrilla quiere la paz con probabilidad de 1/20.

Solución:



Sea q la probabilidad de estar en el nodo de arriba a la derecha y μ la de estar arriba a la izquierda. Entonces el JMS elige la paz si ve un acto de buena voluntad siempre y cuando $p \geq \frac{2}{15}$ y elige la paz si no ve un acto de buena voluntad siempre y cuando $q \geq \frac{2}{15}$.

Suponga que $p \geq \frac{2}{15}, q \geq \frac{2}{15}$ entonces el gobiernos hace un proceso sin importar que y la guerrilla elige N sin importar su tipo y por actualizacion bayesiana $q = \frac{1}{20}$ y por ende esto no es un EBP.

Suponga que $p \leq \frac{2}{15}, q \geq \frac{2}{15}$ entonces el gobierno hace un proceso de paz si NO observa un acto de buena voluntad y la guerra si lo observa, entonces la guerrilla elige N sin importar su tipo y por actualizacion bayesiana $q = \frac{1}{20}$ y por ende esto no es un EBP.

Suponga que $p \leq \frac{2}{15}, q \leq \frac{2}{15}$ entonces el gobierno nunca hace un proceso de paz, entonces la guerrilla elige N sin importar su tipo y por actualizacion bayesiana $q = \frac{1}{20}$ y por ende esto puede ser un EBP (p lo podemos elegir como queramos, en particular $p = 0$ que no es descabellado).

Suponga que $p \geq \frac{2}{15}, q \leq \frac{2}{15}$ entonces el gobierno hace un proceso de paz si observa un acto de buena voluntad y la guerra si no lo observa, entonces....

Si $C = 2$ la guerrilla elige V sin importar su tipo y por actualizacion bayesiana $p = \frac{1}{20}$ y por ende esto no es un EBP.

Si $C = 10$ la guerrilla elige V si quiere la paz y N si no la quiere y por actualizacion bayesiana $p = 1, q = 0$ y por ende esto es un EBP.

4. **1 punto** Suponga que dos jugadores se enfrenten, pero mientras que para el jugador dos es claro quién es el jugador 1, el jugador 1 no sabe si se enfrenta a un jugador dos cuyo nombre empieza por a o cuyo nombre empieza por b. Los pagos dependiendo de quién sea el jugador dos están representados abajo. Suponga que un cuarto de las personas en el mundo tienen un nombre que empieza por "a" y tres cuartos un nombre que empieza por "b".

$1\backslash 2.a$	L	R
T	4,2	0,1
M	3,0	1,1
B	2,4	3,3

$1\backslash 2.b$	L	R
T	0,1	0,2
M	1,1	9,1
B	3,2	4,1

(a) **0.1 puntos** Cuantos tipos hay para cada jugador.

Solución: Hay un solo tipo para el jugador uno y dos tipos para el jugador dos.

(b) **0.1 puntos** Como es una regla de decisión para cada jugador

Solución: Para el jugador uno el conjunto de reglas de decisión es $S_1 = \{T, M, B\}$ mientras que el del jugador dos es $S_2 = \{LL, LR, RL, RR\}$

(c) **0.8 puntos** Encuentre el equilibrio Bayes-Nash de este juego.
Note que

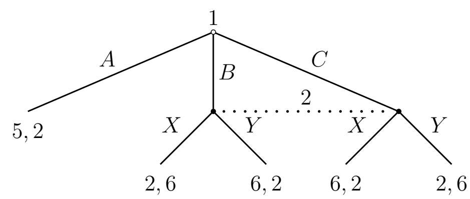
$$\begin{aligned} MR_2(T) &= LR \\ MR_2(M) &= \{RR, RL\} \\ MR_2(B) &= LL \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} MR_1(LL) & = & B \\ MR_1(LR) & = & M \\ MR_1(RL) & = & B \\ MR_1(RR) & = & M \end{array}$$

Los equilibrios son (B, LL) y (M, RR)

Puede elegir entre el punto 5 y el punto 7 (Solo debe hacer uno de los dos). Para ayudarlo a elegir... le anticipo que aunque el punto cinco se ve mas fácil tiene equilibrios en estrategias mixtas). Únicamente calificare uno de los dos puntos.

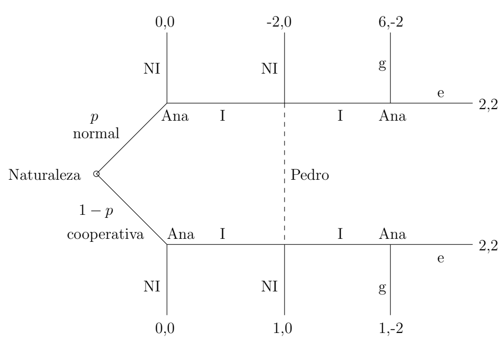
5. **1 punto** Considere el siguiente juego:



(a) **1 punto** Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos.

Los unicos EBP son del tipo $(A, \sigma_2 = (p, 1-p))$, donde p es la probabilidad que el jugador dos le asigna a jugar x y $p \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, y las creencias del segundo jugador son $\mu(A) = \mu(B) = \frac{1}{2}$.

6. **1 punto** Considere el siguiente juego. Los pagos van (U_{Ana}, U_{Pedro}):



(a) **1 punto** Encuentre todos los equilibrios Bayesianos Perfectos si $p = \frac{1}{4}$.

El unico EBP aca es $(I^n I^c g^n e^c, I)$.

7. **Bono de 1** Considere una subasta de dos firmas petroleras por el derecho a extraer petroleo de un pozo. Cada firma envía un ingeniero antes de la subasta para determinar la capacidad del pozo. Cada

ingeniero reporta a su empresa que el pozo tiene capacidad s_i. Es decir el ingeniero de la primera empresa reporta a dicha empresa s_1 y el ingeniero de la segunda empresa reporta s_2 a dicha empresa. Cada empresa conoce lo que reporta su ingeniero pero no lo que reporta su contrincante. Sin embargo, ambas empresas saben que lo que reporta el ingeniero de su contrincante es una variable aleatoria que se distribuye uniforme entre $s_{-i} \sim [0,1]$. Ambos ingenieros cometen errores al calcular la capacidad del pozo y dicha es en realidad $s_1 + s_2$ y ambas firmas saben que ese es el valor real del pozo.

0.25 puntos Demuestre que en una subasta de primer precio pujar el reporte del ingeniero es un equilibrio Bayes-Nash

Uno gana cuando la puja es mayor que la del otro. Si el otro puja su reporte entonces Note que la ganancia esperada es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}U &= \int_0^a (s_{-i} + s_i - a) f_{s_{-i}}(s_{-i}) ds_{-i} \\
\mathbb{E}U &= \int_0^a (s_{-i} + s_i - a) ds_{-i} \\
\mathbb{E}U &= \frac{1}{2} s_{-i}^2 + s_i s_{-i} - a s_{-i} |_0^a \\
\mathbb{E}U &= \frac{1}{2} a^2 + s_i a - a^2
\end{aligned}$$

Derivando con respecto a a e igualando a cero.

$$\begin{aligned}
s_i - a &= 0 \\
s_i = a &
\end{aligned}$$

Entonces un equilibrio simétrico es donde todos pujamos el reporte del ingeniero.

0.25 puntos Demuestre que en una subasta de segundo precio pujar el doble del reporte del ingeniero es un equilibrio Bayes-Nash

Uno gana cuando la puja es mayor que la del otro y paga la puja del otro... es decir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}U &= \int_0^{\frac{a}{2}} (s_{-i} + s_i - 2s_{-i}) f_{s_{-i}}(s_{-i}) ds_{-i} \\
\mathbb{E}U &= \int_0^{\frac{a}{2}} s_i - s_{-i} ds_{-i} \\
\mathbb{E}U &= s_i s_{-i} - \frac{1}{2} s_{-i}^2 d |_0^{\frac{a}{2}} \\
\mathbb{E}U &= s_i \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

Derivando con respecto a a e igualando a cero.

$$\begin{aligned}
s_i \frac{1}{2} - \frac{a}{4} &= 0 \\
2s_i = a &
\end{aligned}$$

Entonces un equilibrio simétrico es donde todos pujamos el doble del reporte del ingeniero.

0.25 puntos Demuestre la ganancia esperada para las firmas es la misma sin importar la subasta

En la de primer precio $a = s_i$ entonces usando las formulas de antes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U &= \frac{1}{2}a^2 + s_i a - a^2 \\ \mathbb{E}U &= \frac{1}{2}s_i^2\end{aligned}$$

En la de segundo precio $a = 2s_i$ entonces usando las formulas de antes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U &= s_i\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{4} \\ \mathbb{E}U &= s_i^2 - \frac{1}{2}s_i^2 \\ \mathbb{E}U &= \frac{1}{2}s_i^2\end{aligned}$$

0.25 puntos ¿Cual es el valor esperado del pozo para una firma con señal s_i? ¿Cual es el valor esperado del pozo para una firma con señal s_i que gana la subasta? Compare este valor con la ganancia esperada para cada una de las firmas cuando gana la subasta. Comente este resultado

Antes de ganar el valor esperado es:

$$\mathbb{E}(s_1 + s_2|s_1) = s_1 + 0.5$$

Después de ganar en la de primer precio (la de segundo es igual)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U &= \int_0^{s_i}(s_{-i} + s_i) \\ \mathbb{E}U &= s_{-i}^2\frac{1}{2} + s_i s_{-i}|_0^{s_i} \\ \mathbb{E}U &= s_i^2\frac{1}{2} + s_i^2 \\ \mathbb{E}U &= s_i^2\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Note que el valor esperado de ganar siempre esta por debajo que el valor esperado antes de ganar....

Esto es por que uno gana si el otro no recibe una señal muy alta por parte del ingeniero y esto reduce el valor del bien una vez se gana... esto se conoce como la "maldición del ganador"